Pozoruhodné vlastnosti kruhové inverze

Aleš Kobza

XXI. seminář o filosofických

otázkách matematiky a fyziky

Velké Meziříčí, 20. 8. - 23. 8. 2024

Definice

V rovině je dán bod S a dále kladné reálné číslo λ. *Kruhovou inverzí* se středem S a koeficientem λ rozumíme zobrazení, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X', který leží na polopřímce $\overrightarrow{SX}$, přičemž

$$|SX| \cdot |SX'| = \lambda\,.$$

(Kruhovou inverzi lze uvažovat obecněji pro $\lambda \neq 0$, ale v následujících úvahách vystačíme s jednodušším případem $\lambda > 0$.)

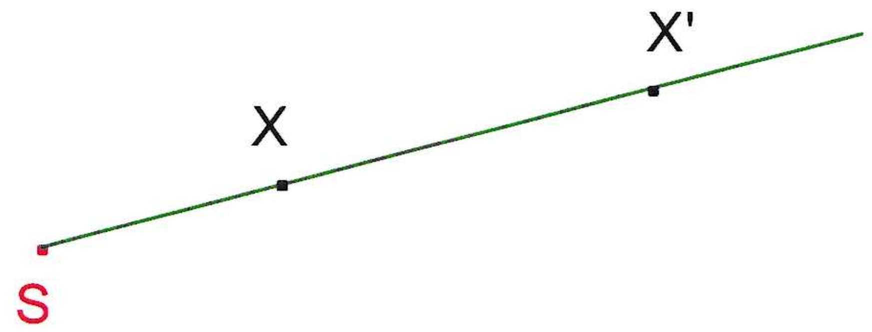
Vlastnosti

1. Pro daný bod $X \neq S$ je polopřímka $\overrightarrow{SX}$ určena jednoznačně.

Protože z $|SX| \cdot |SX'| = \lambda$ vypočteme

$$|SX'| = \frac{\lambda}{|SX|},$$

známe tím vzdálenost bodu X' od bodu S, takže poloha bodu X' je určena rovněž jednoznačně. Není tedy možné, aby k nějakému vzoru X existovalo více obrazů X'. To znamená, že kruhová inverze je skutečně zobrazením, jak bylo v definici zmíněno.


X'
X
S

2. Je-li $|SX| = \sqrt{\lambda}$, pak $\left|SX'\right| = \sqrt{\lambda}$. Každý bod, který leží na kružnici $l\left(S; \sqrt{\lambda}\right)$ je tedy samodružný (tj. $X = X'$).

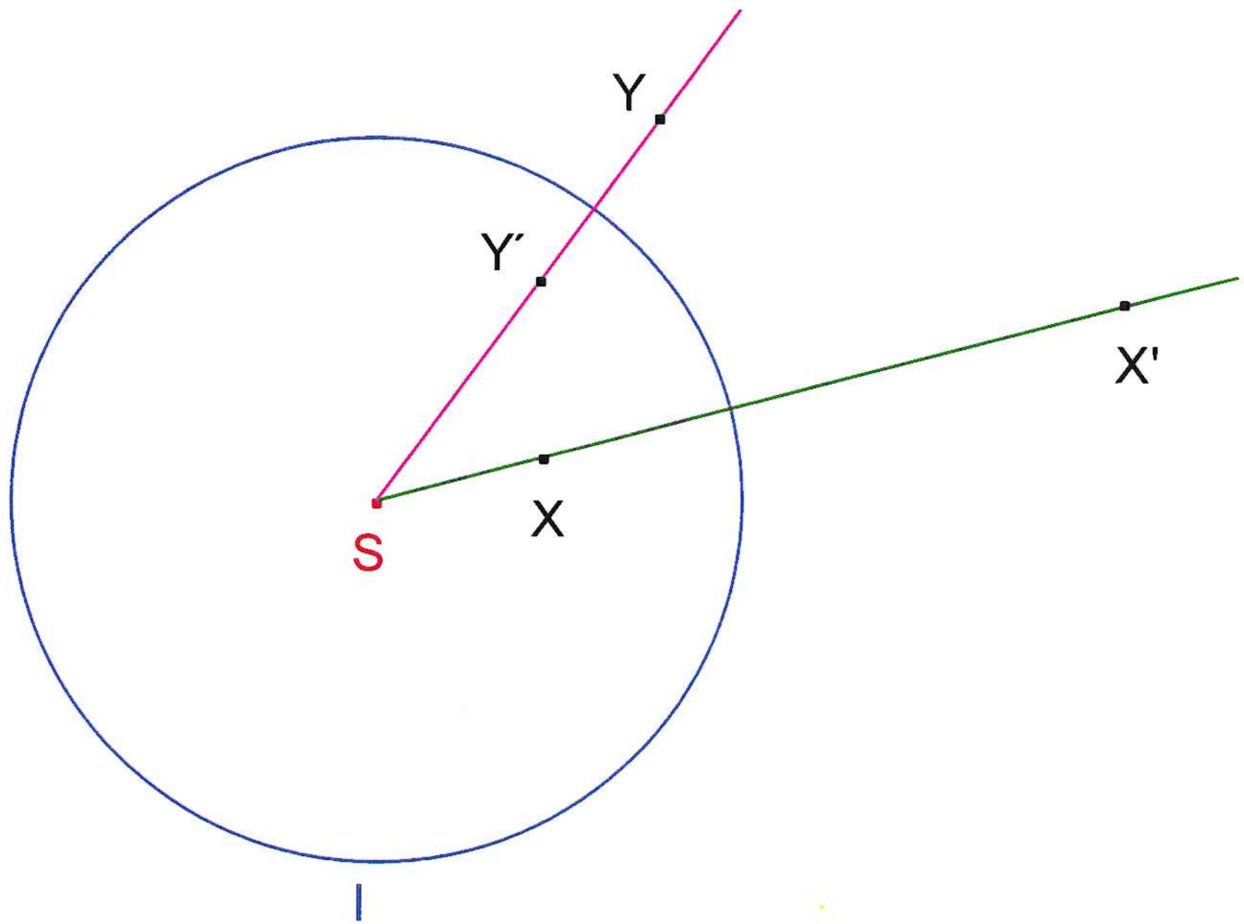
Pokud $|SX| < \sqrt{\lambda}$, pak $\left|SX'\right| > \sqrt{\lambda}$.

A opačně. Jestliže $|SX| > \sqrt{\lambda}$, pak $\left|SX'\right| < \sqrt{\lambda}$.

Jinak řečeno. Když je X bodem z vnitřní oblasti kružnice l, je jeho obraz X' bodem z vnější oblasti kružnice l. Je-li naopak Y bodem z vnější oblasti kružnice l, je jeho obraz Y' bodem z vnitřní oblasti této kružnice.

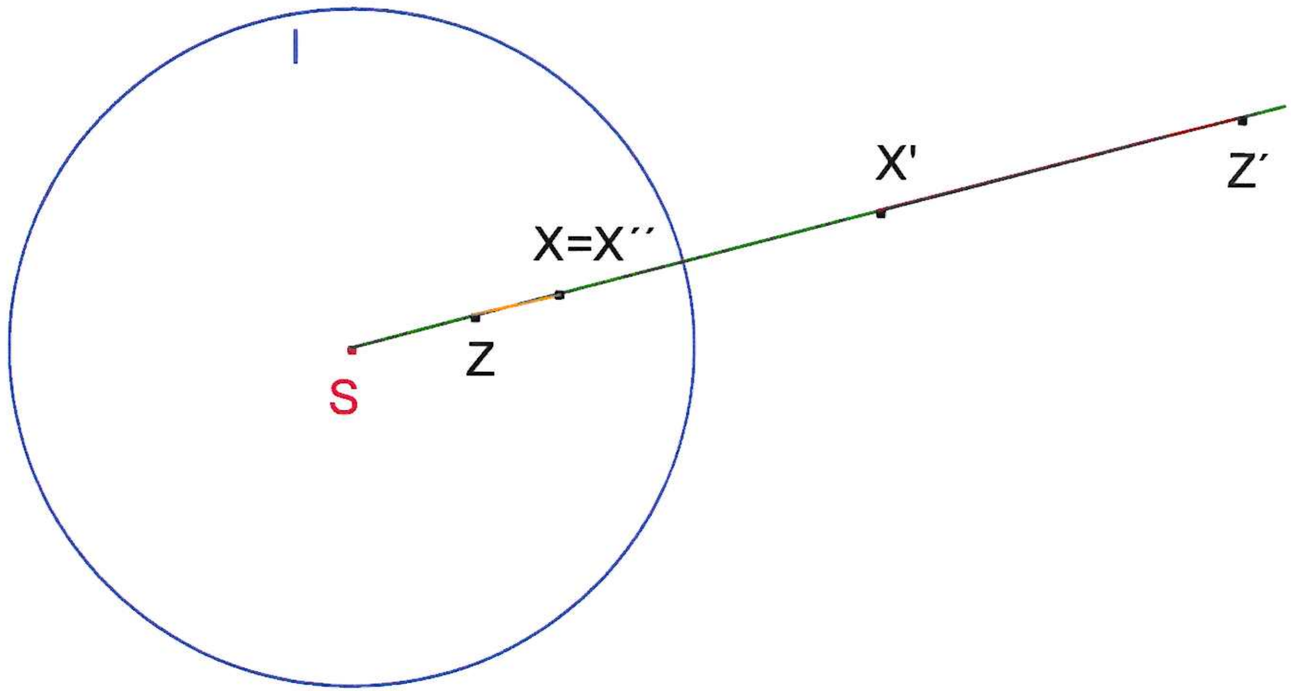
Popsaná skutečnost zdůvodňuje název studovaného zobrazení.

Kruhová inverze je jednoznačně je zadána též pomocí kružnice l (jejímž středem je bod S). Proto se kružnice l nazývá **kružnicí kruhové inverze**.


Y
Y′
X'
S
X
l

3. Zobrazíme-li bod X' znovu v téže kruhové inverzi, dostaneme bod X'', který splývá s původním vzorem X. To znamená, že složením týchž dvou kruhových inverzí získáme identitu. Kruhová inverze je tedy **involutorním** zobrazením. Tuto vlastnost má například středová či osová souměrnost, ale nemá ji třeba posunutí.

4. Na příkladu konkrétní polohy bodů X a Z z vnitřní oblasti kružnice kruhové inverze l si můžeme všimnout, že kruhová inverze nezachovává délky (je evidentní, že $|XZ| \neq |X'Z'|$), ani jejich poměry ($|XZ| < |X'Z'|$ ale $|X'Z'| > |X''Z''| = |XZ|$). Takže kruhová inverze **není ani shodným ani podobným** zobrazením.


I
X=X´´
X'
Z´
Z
S

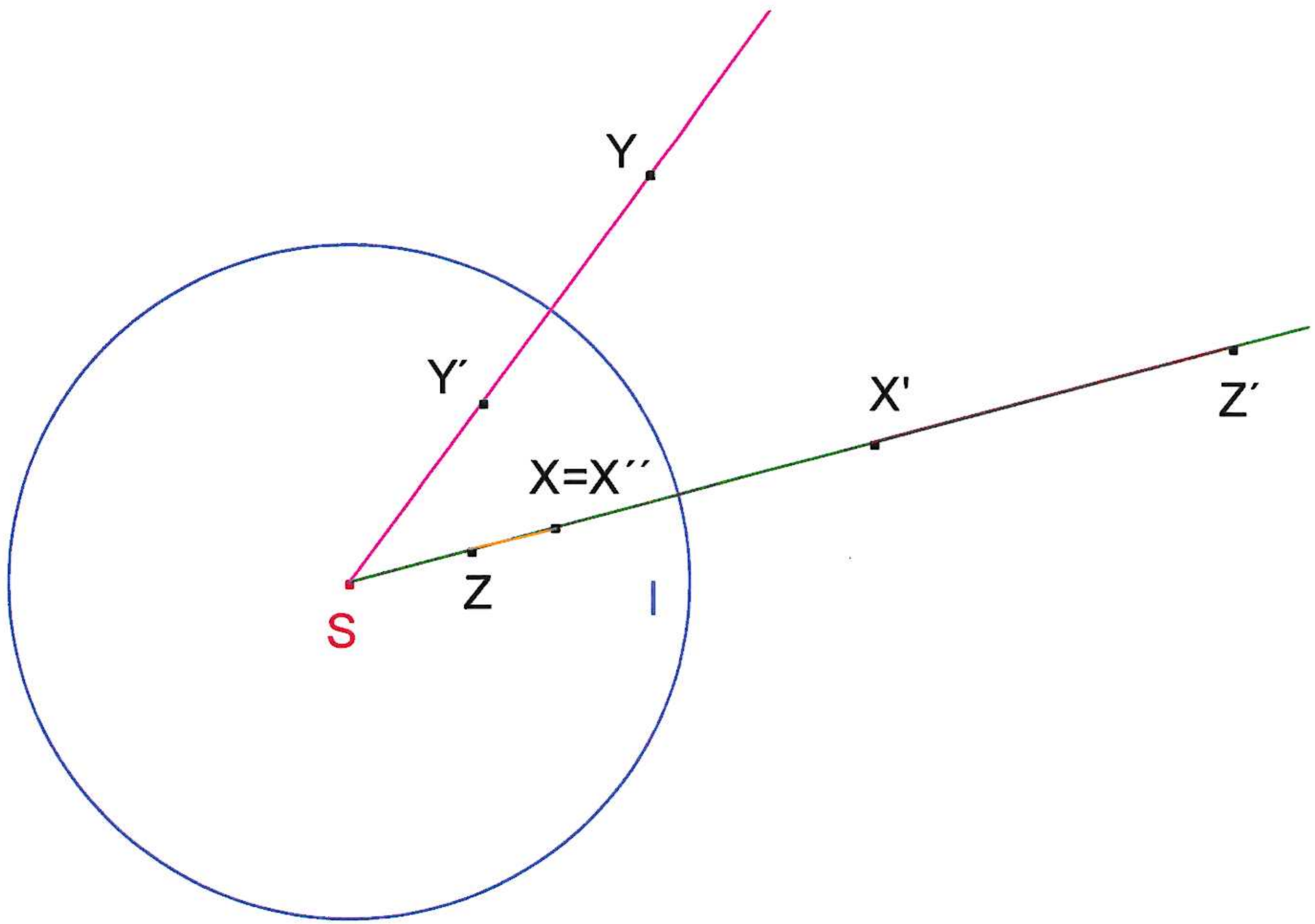
5. Z doposud uvedeného je patrné, že dva různé vzory se vždy zobrazí do dvou různých obrazů, takže kruhová inverze je **prostým** zobrazením.

Dále libovolný bod X' roviny s výjimkou bodu S může být obrazem některého bodu $X \neq S$ v uvažované kruhové inverzi. Definiční vztah totiž na polopřímce $\overrightarrow{SX'}$ existenci takového bodu X zajišťuje. Kruhová inverze je tedy zobrazením **na** množinu $\mathbb{E}_2 - \{S\}$.

Dohromady to znamená, že kruhová inverze je **bijektivním** zobrazením $(\mathbb{E}_2 - \{S\} \longrightarrow \mathbb{E}_2 - \{S\})$.

6. Uvážíme-li polopřímku $\overrightarrow{SX}$ a začneme-li po ní vzor $X \neq S$ posouvat směrem k bodu S, bude se jeho obraz X' po této polopřímce od bodu S naopak vzdalovat. Má-li totiž výsledek součinu $|SX| \cdot |SX'|$ zůstat konstantní, je jasné, že se při zmenšení prvního musí ten druhý zvětšit.

Takto studentům můžeme vysvětlit, že bod S by se vlastně zobrazil do nekonečna a opačně nekonečně vzdálený bod by se zobrazil do středu kruhové inverze.

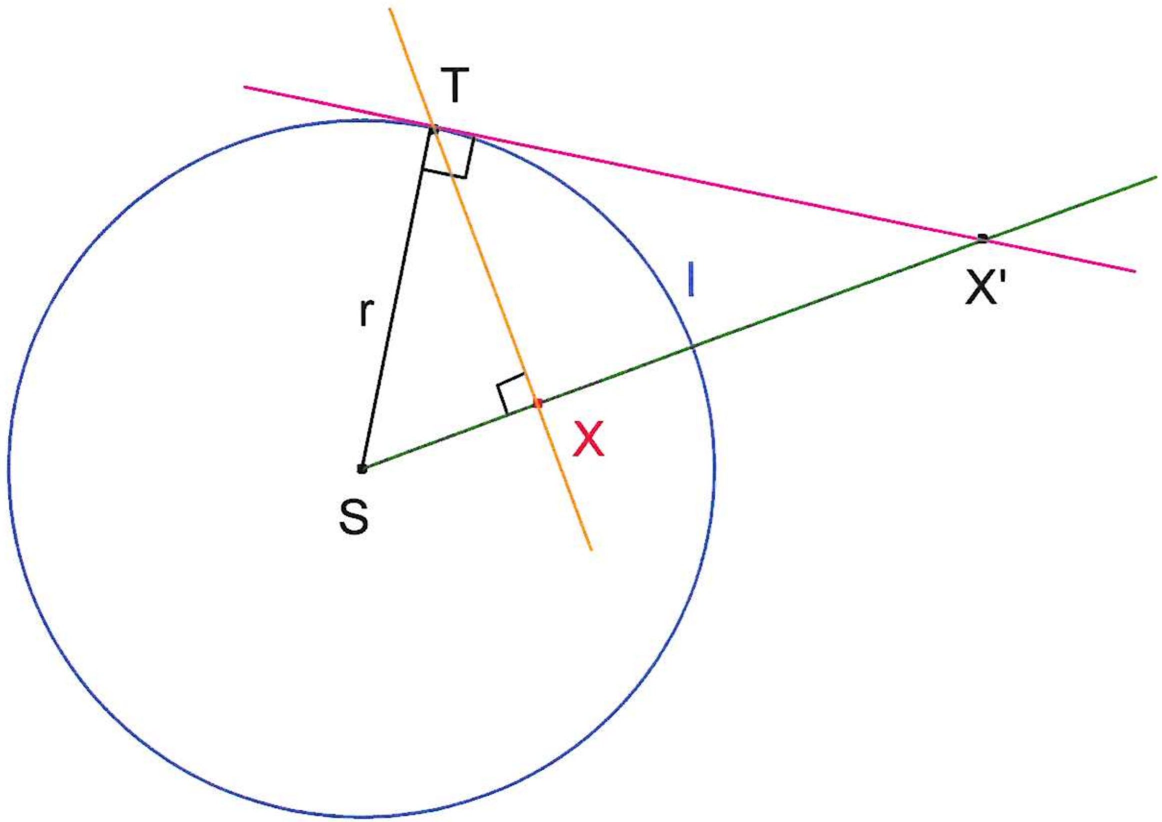

Y
Y′
X=X′′
X'
Z′
Z
S
I

Zobrazení bodu z vnitřní oblasti kružnice kruhové inveze

Uvažujme kružnici kruhové inverze $l\,(S;r)$, kde $r = \sqrt{\lambda}$ a bod $X \neq S$, pro který platí $|SX| < r$. Má být splněna podmínka

$$|SX| \cdot |SX'| = r^2\,.$$

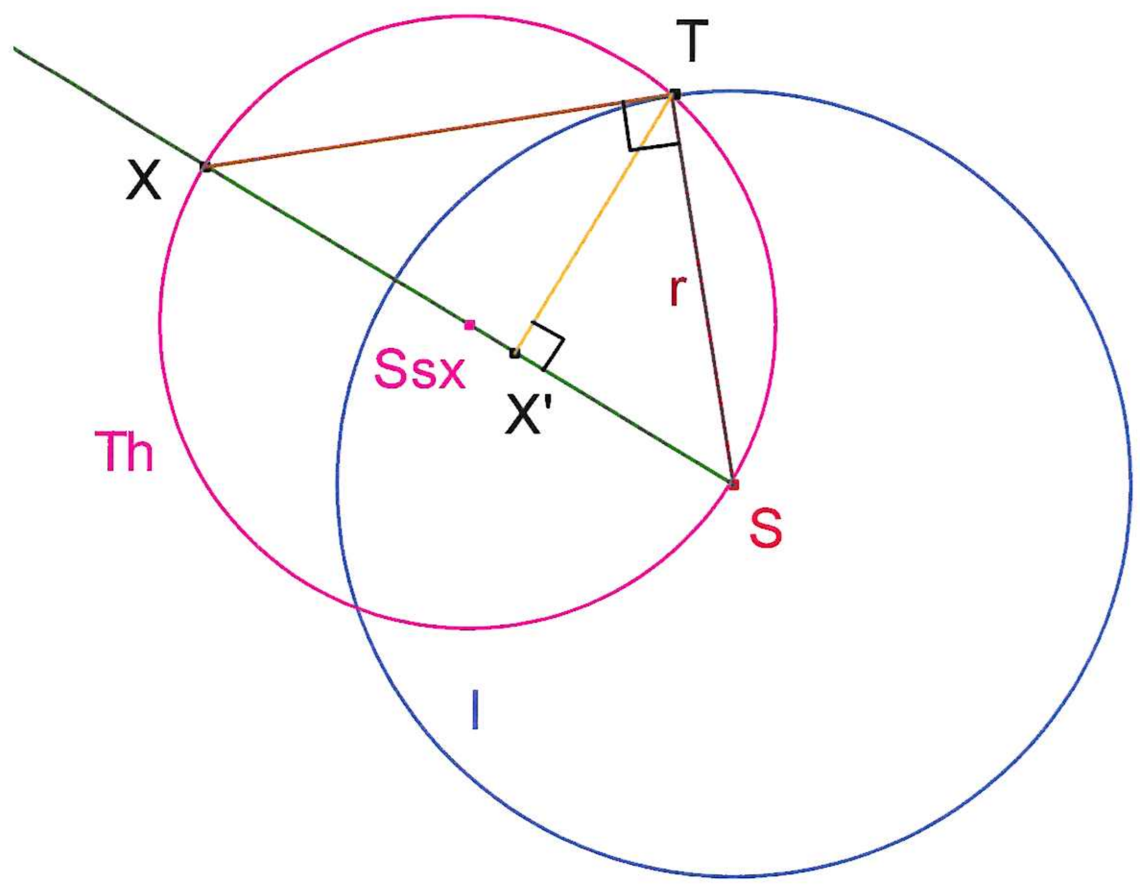
Konstrukci bodu X' provedeme s využitím Eukleidovy věty o odvěsně. Úsečka SX' má být přeponou pravoúhlého trojúhelníku $SX'T$ $(T \in l)$, přičemž známý bod X je patou výšky z bodu T. Bod T je průsečíkem kružnice l s kolmicí vedenou bodem X k polopřímce $\overrightarrow{SX'}$. Hledaný bod X' leží v průsečíku polopřímky $\overrightarrow{SX'}$ s kolmicí vedenou bodem T k úsečce ST.


T
r
l
X'
X
S

Zobrazení bodu z vnější oblasti kružnice kruhové inveze

Uvažujme kružnici kruhové inverze $l\,(S;r)$, kde $r=\sqrt{\lambda}$ a bod X takový, že $|SX|>r$. Opět má platit $|SX|\cdot\left|SX'\right|=r^2$, takže konstrukci bodu X' zase provedeme pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, pouze jiným postupem. Tentokrát uvážíme pravoúhlý trojúhelník SXT $(T\in l)$ s přeponou SX. Hledaný bod X' pak má být patou výšky z bodu T. Bod T získáme jako průsečík Thaletovy kružnice nad průměrem SX a kružnice l. Vedením kolmice bodem T k úsečce SX na ní sestrojíme bod X'.

Každá přímka procházející středem kruhové inverze je tedy (slabě) samodružná.


T
X
r
Ssx
X'
Th
S
I

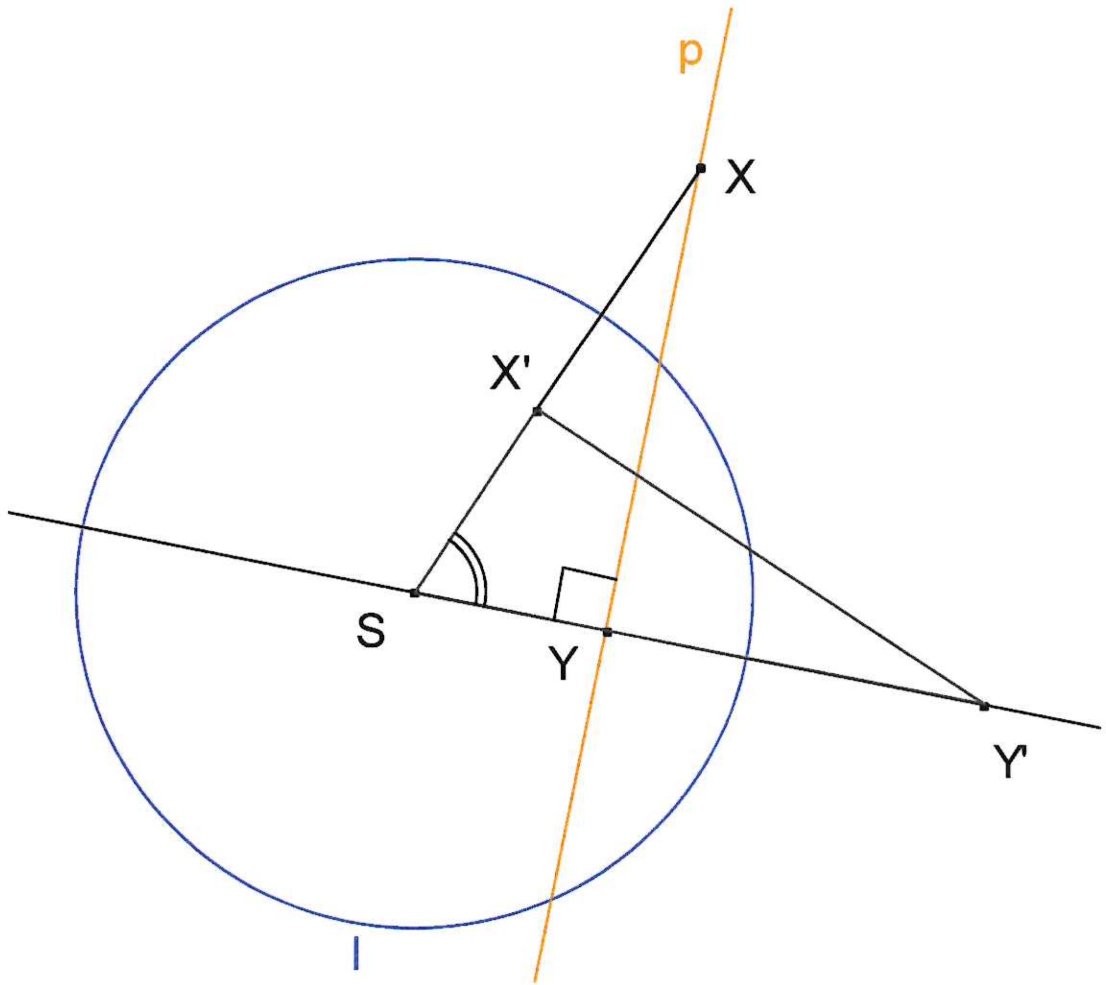
Zobrazení přímky neprocházející středem kruhové inveze

Nechť je dána kružnice kruhové inverze $l\left(S;\sqrt{\lambda}\right)$ a přímka p taková, že $S \notin p$. Označme Y kolmý průmět bodu S na přímku p a Y' jeho obraz v uvažované kruhové inverzi. Dále uvažujme libovolný bod $X \neq Y$ přímky p a jeho obraz X'.

Z definice plyne

$$|SX| \cdot \left|SX'\right| = |SY| \cdot \left|SY'\right| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|SX|}{|SY'|} = \frac{|SY|}{|SX'|}.$$

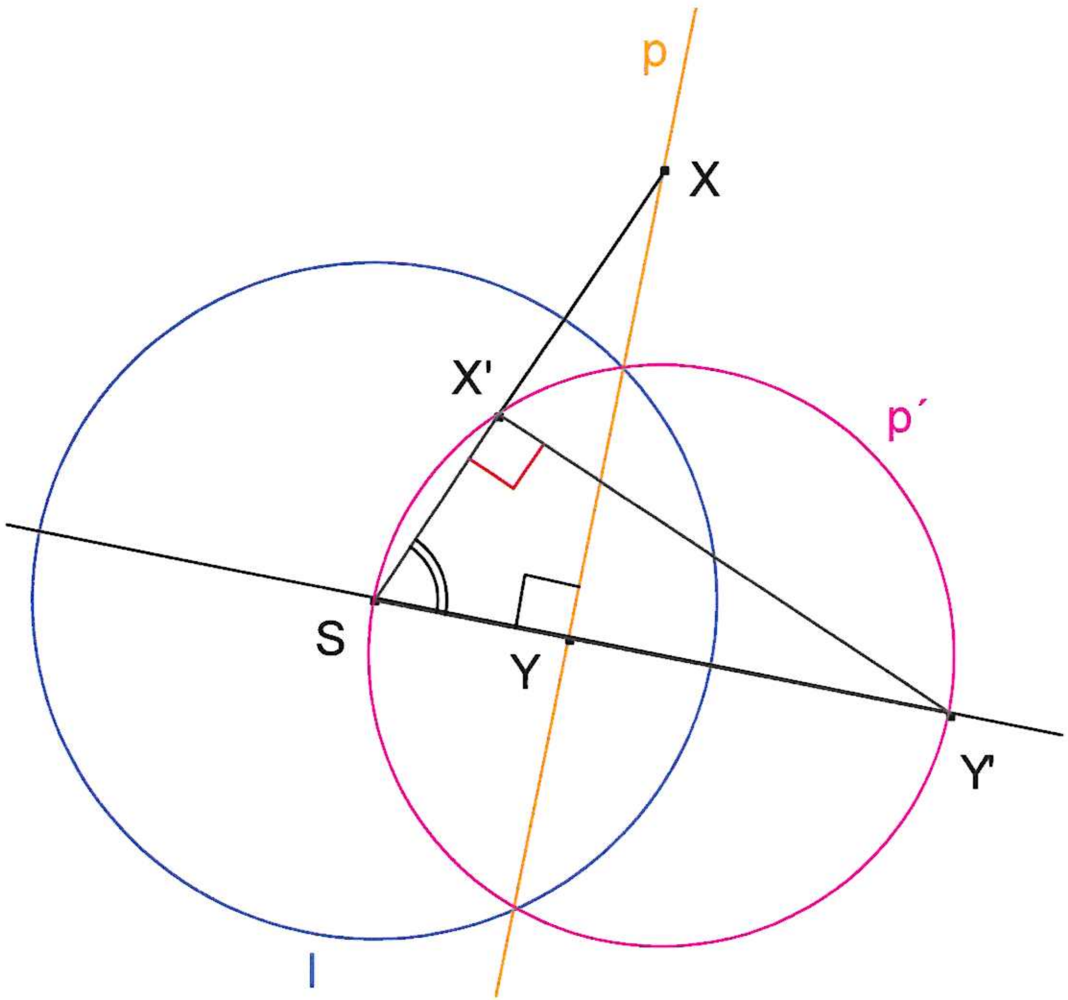
Neboť dále $|\sphericalangle XSY| = \left|\sphericalangle Y'SX'\right|$, jsou trojúhelníky XSY a $Y'SX'$ podobné podle věty sus.


p
X
X'
S
Y
Y'
I

Z podobnosti trojúhelníků XSY a $Y'SX'$ vyplývá, že jejich odpovídající si vnitřní úhly mají stejné velikosti. Vzhledem k tomu, že úhel SYX je pravý, musí být pravý též úhel $SX'Y'$. Takže z bodu X', který neleží na polopřímce $\overrightarrow{SY'}$, je úsečku SY' vidět pod pravým úhlem. Proto bod X' leží na Thaletově kružnici s průměrem SY'.

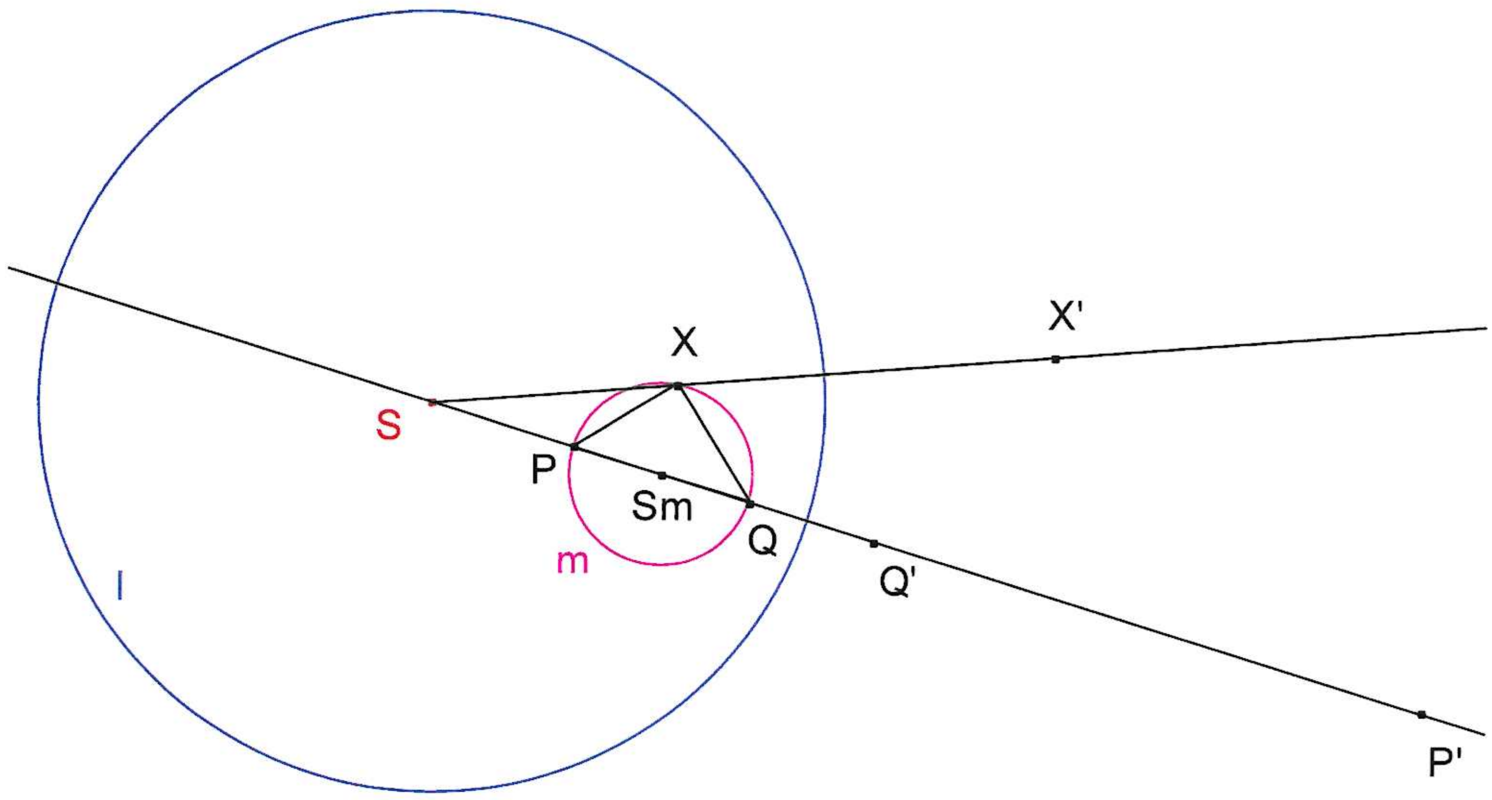
Uvedené nejen dokazuje, že **obrazem přímky p je kružnice** p', ale též dává návod, jak ji zkonstruovat. Stačí k tomu zobrazit vhodný bod (tj. bod Y) a sestrojit příslušnou Thaletovu kružnici.

Neboť kruhová inverze je bijektivním zobrazením, platí též opačně, že obrazem kružnice p' je přímka p.


p
X
X'
p´
S
Y
Y'
l

Zobrazení kružnice neprocházející středem kruhové inveze

Nechť je dána kružnice kruhové inverze $l\left(S;\sqrt{\lambda}\right)$ a kružnice $m\left(S_m, r\right)$ taková, že $S \notin m$. Označme P průsečík kružnice m s úsečkou SS_m, Q průsečík kružnice m s polopřímkou opačnou k $\overrightarrow{PS}$, P' a Q' po řadě obrazy bodů P, Q v kruhové inverzi určené kružnicí l. Uvažujme dále libovolný bod X kružnice m takový, že $P \neq X \neq Q$ a jeho obraz X' v uvažované kruhové inverzi.


X'
X
S
P
Sm
Q
Q'
m
l
P'

Analogickou úvahou jako v předchozí části odvodíme podobnost trojúhelníků XSP a $P'SX'$ a trojúhelníky XSQ a $Q'SX'$ (rovněž podle věty sus). Proto platí

$$|\sphericalangle SXP| = |\sphericalangle SP'X'| \; . \tag{1}$$

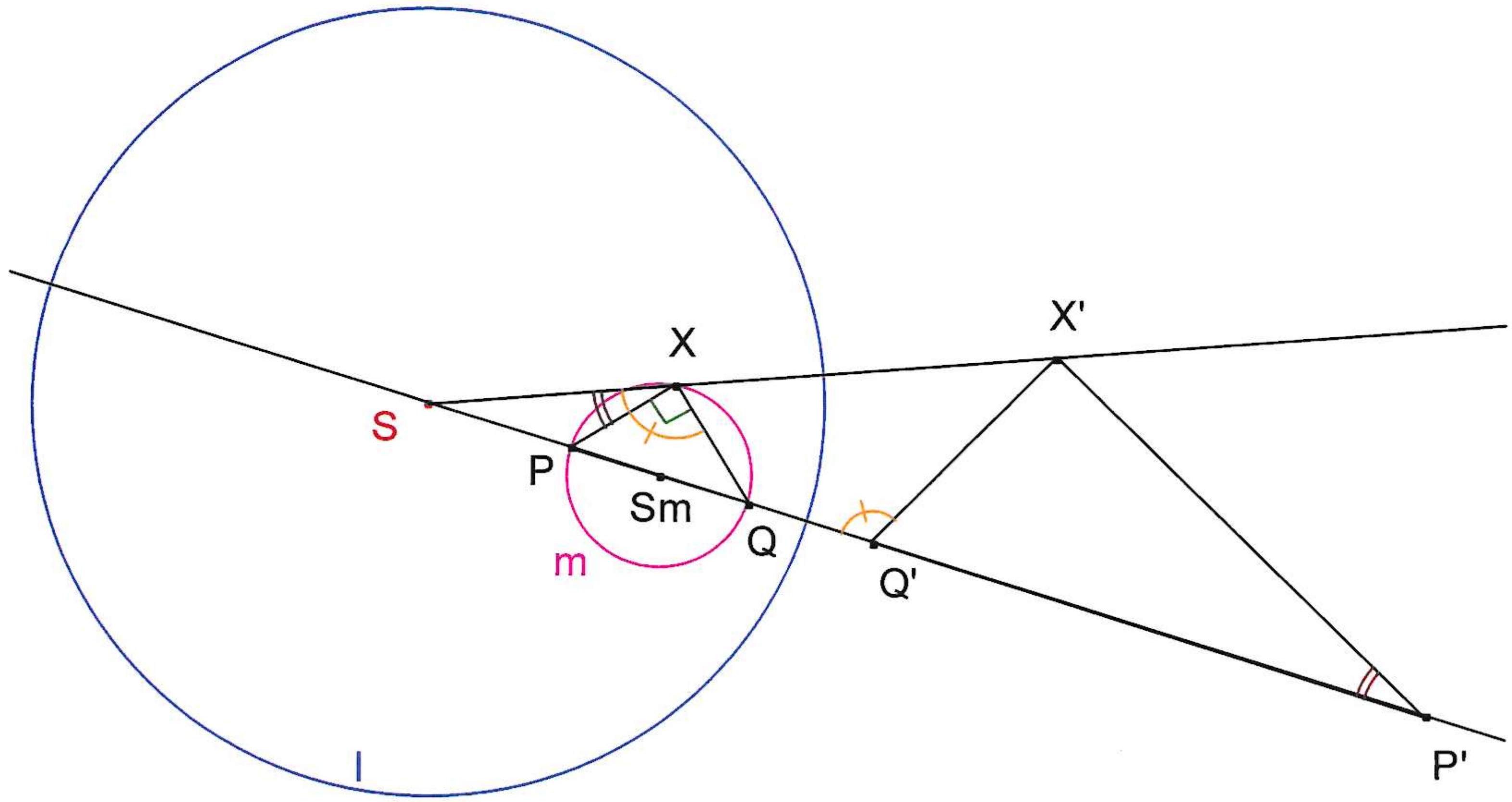
a

$$|\sphericalangle SXQ| = |\sphericalangle SQ'X'| \; . \tag{2}$$

Protože bod P je vnitřním bodem úsečky SQ, platí dále

$$|\sphericalangle SXQ| = |\sphericalangle SXP| + |\sphericalangle PXQ| \; , \text{ přičemž } |\sphericalangle PXQ| = 90^\circ \, , \tag{3}$$

neboť bod X leží na Thaletově kružnici nad průměrem PQ.


X
X'
S
P
Sm
Q
Q'
m
l
P'

Užitím známého tvrzení o rovnosti velikosti vnějšího úhlu $\sphericalangle SQ'X'$ v trojúhelníku $Q'X'P'$ a součtu velikostí odpovídajících dvou úhlů vnitřních zjistíme, že

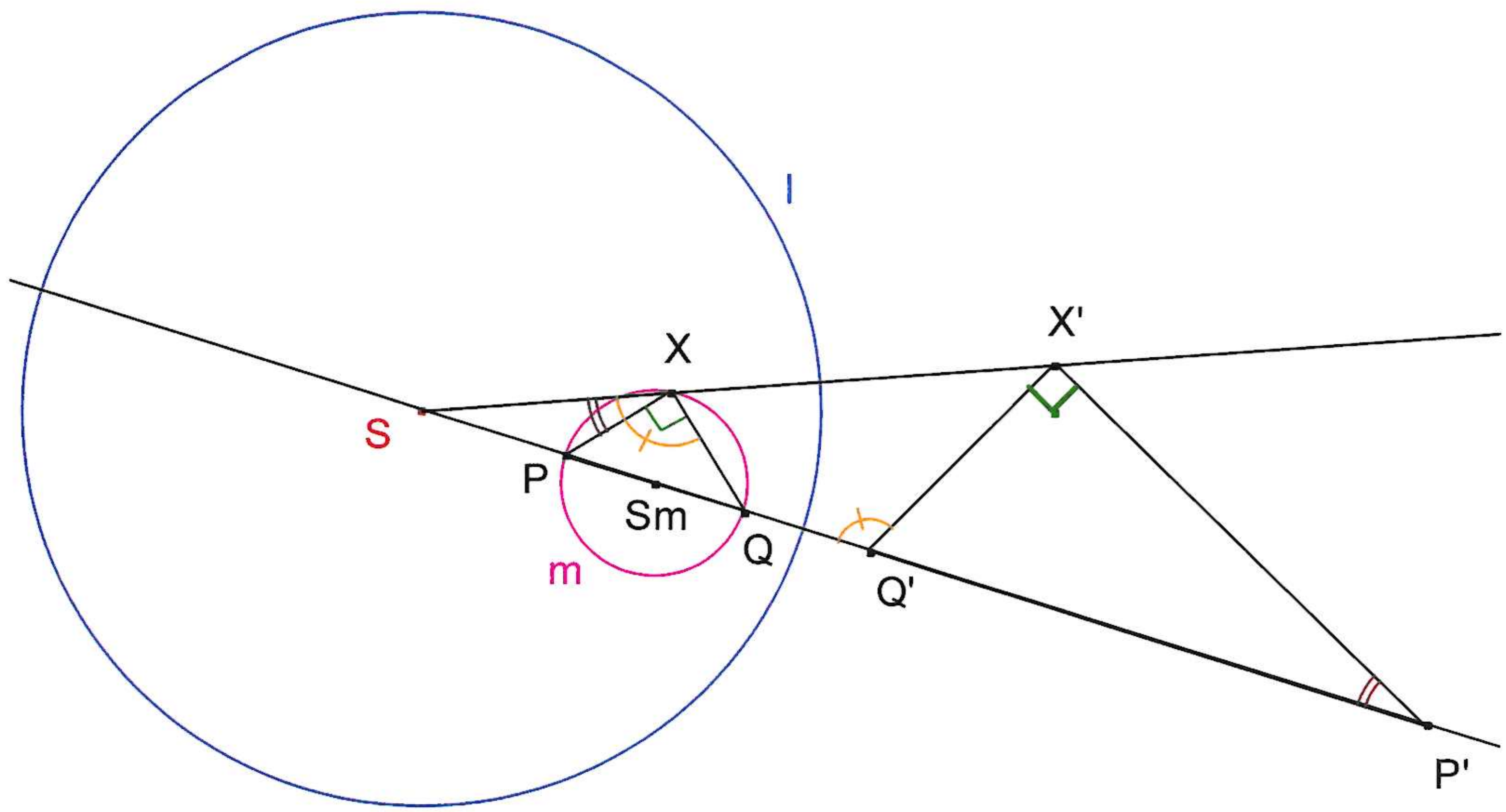
$$\left|\sphericalangle SQ'X'\right| = \left|\sphericalangle Q'X'P'\right| + \left|\sphericalangle Q'P'X'\right| = \left|\sphericalangle Q'X'P'\right| + \left|\sphericalangle SP'X'\right| \,. \tag{4}$$

Z (4) užitím (2) a (1) dostáváme

$$\left|\sphericalangle Q'X'P'\right| = \left|\sphericalangle SQ'X'\right| - \left|\sphericalangle SP'X'\right| = |\sphericalangle SXQ| - |\sphericalangle SXP| \,.$$

Odtud již podle (3) vypočteme

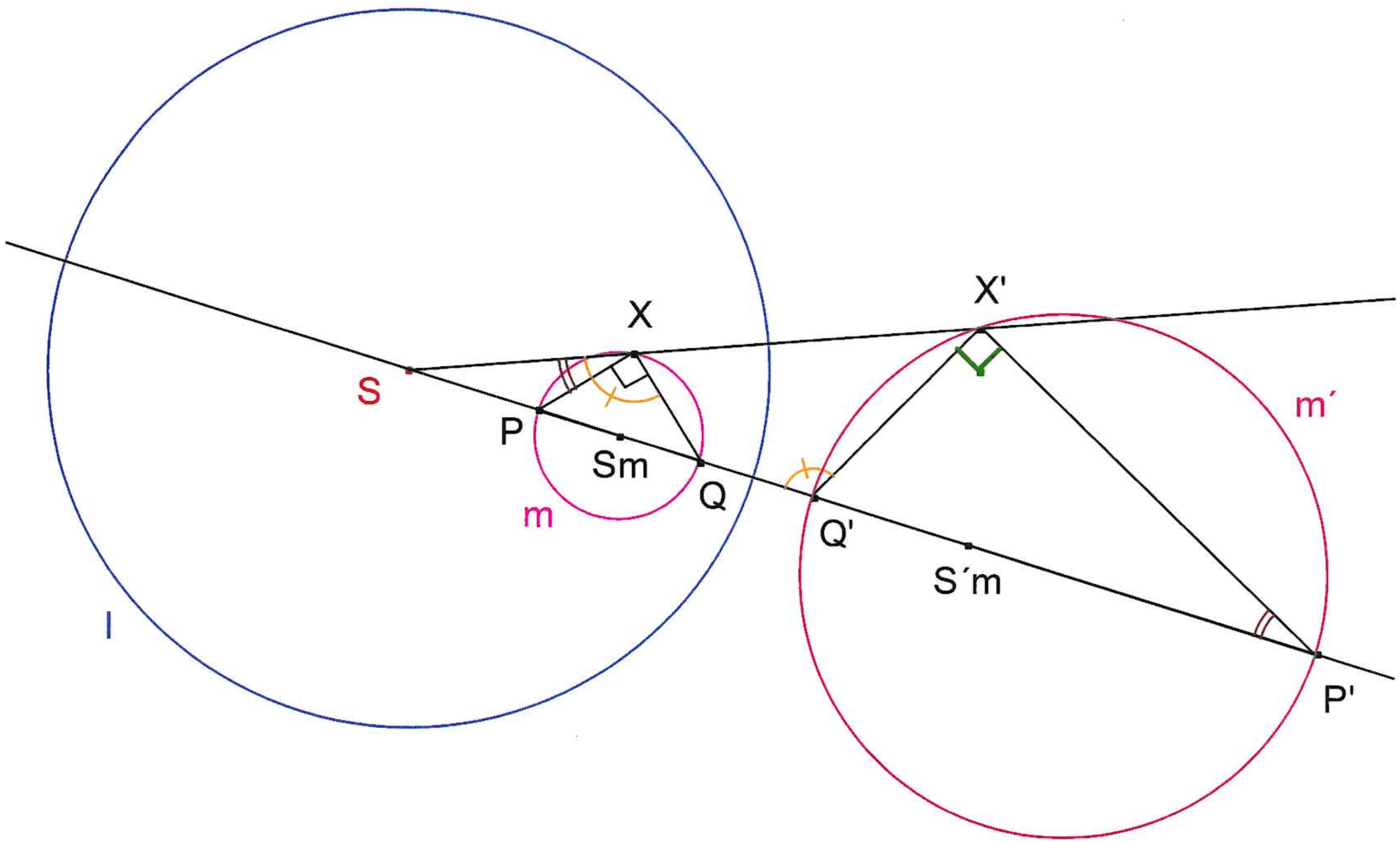
$$\left|\sphericalangle Q'X'P'\right| = |\sphericalangle SXP| + |\sphericalangle PXQ| - |\sphericalangle SXP| = |\sphericalangle PXQ| = 90^\circ \,.$$


X
X'
l
S
P
Sm
Q
m
Q'
P'

To ale znamená, že z bodu X', který neleží na úsečce $Q'P'$, tuto úsečku vidíme pod pravým úhlem, takže bod X' leží na Thaletově kružnici m' nad průměrem $Q'P'$. Dokázali jsme tedy, že **obrazem kružnice m je kružnice m'**.

Současně jsme provedeným důkazem rovněž dali návod, jak vlastní zobrazení kružnice m pomocí nalezení obrazů bodů P a Q konstrukčně provést.

Označme S'_m obraz středu S_m kružnice m. Všimněme si skutečnosti, která je na obrázku jasně patrná, že bod S'_m není středem kružnice m'. Kružnici m totiž nelze zobrazit pomocí zobrazení jejího středu S_m, jak jsou studenti zvyklí při užití jiných zobrazení.

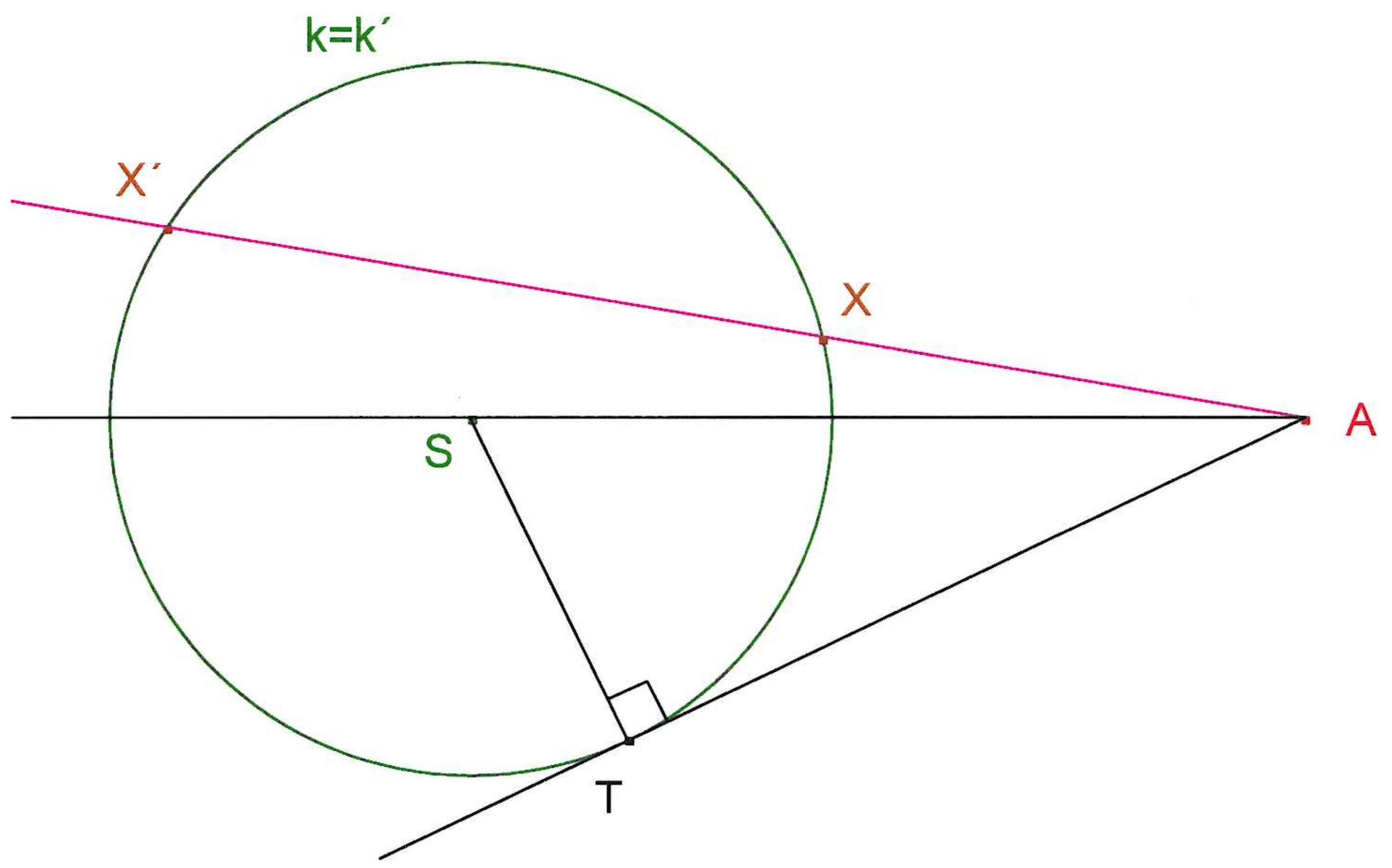

X
X'
S
P
Sm
Q
m
Q'
S´m
m´
P'
l

Existence slabě samodružné kružnice

Uvažujme nyní kružnici $k(S;r)$ a bod A takový, že $|SA| > r$. Hledejme odpověď na otázku, je-li možné najít kruhovou inverzi se středem v bodě A takovou, aby v ní kružnice k byla samodružná, tzn. aby se jakýkoliv bod X kružnice k zobrazil do bodu X', který je rovněž bodem kružnice k, ale nemusí pro něj platit $X = X'$. K odpovědi se dostaneme pomocí mocnosti bodu A ke kružnici k. Jejím užitím dostáváme

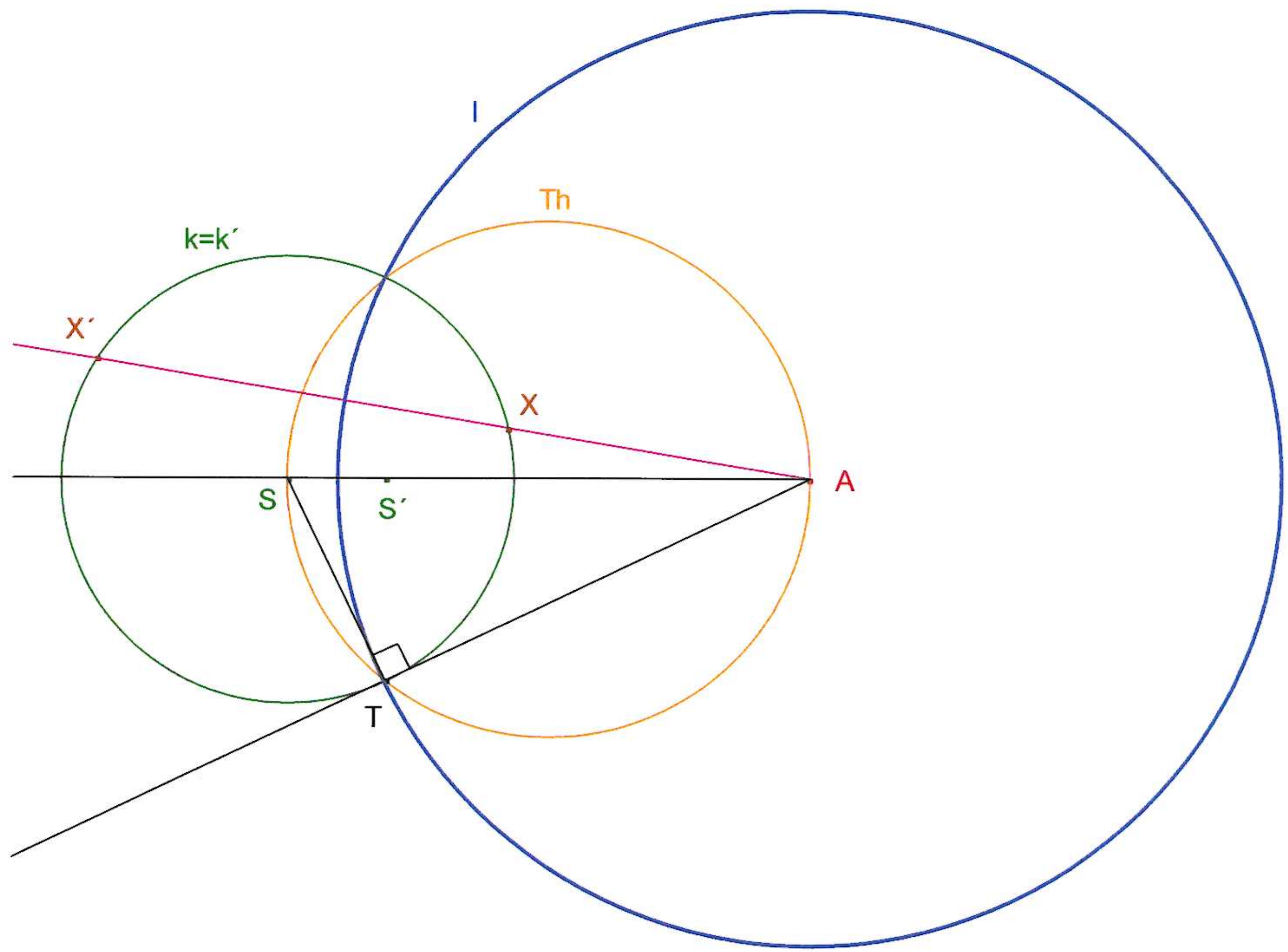
$$|AX| \cdot |AX'| = |AT|^2 ,$$

kde T značí dotykový bod libovolné tečny vedené bodem A ke kružnici k s kružnicí k.


k=k´
X´
X
A
S
T

Uvážíme-li tedy kružnici kruhové inverze $l\,(A; |AT|)$, bude v ní kružnice k slabě samodružná.

Ještě si můžeme povšimnout, že $S \notin l$, což znamená, že pro obraz S' středu kružnice S platí $S' \neq S$. To znamená, že dokonce ani v situaci, kdy je kružnice k samodružná, se její střed S nezobrazil do středu kružnice k'.


I
Th
k=k´
X´
X
S
S´
A
T

Shrnutí dosavadních úvah

Při kruhové inverzi se středem S se

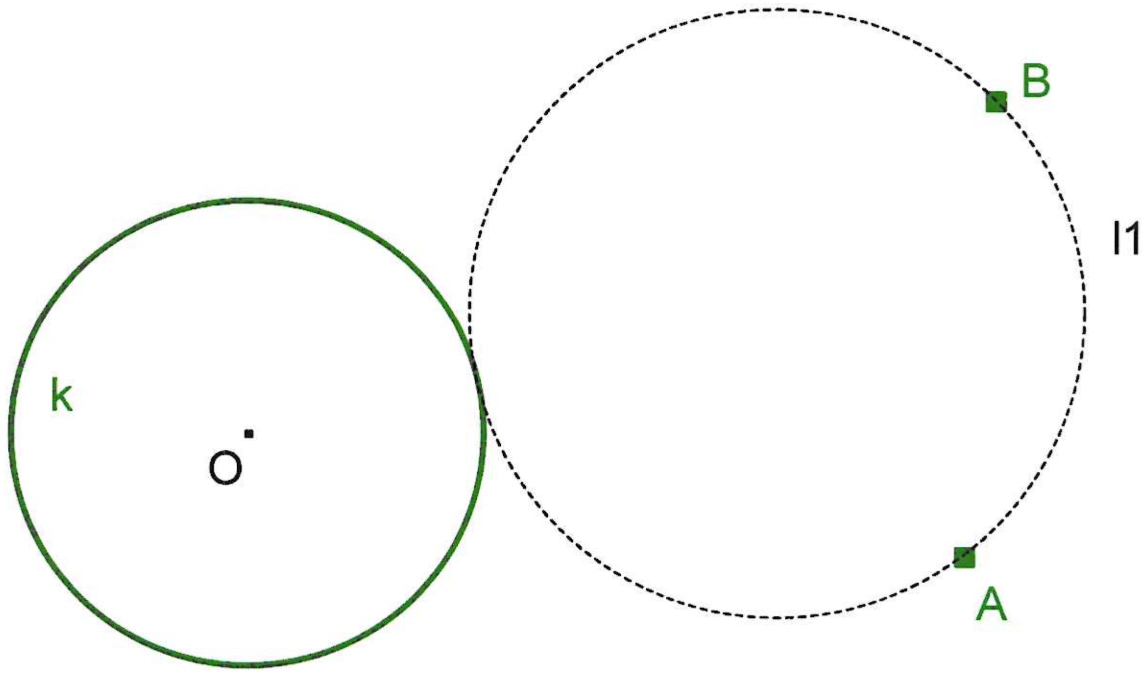
- přímka procházející bodem S zobrazí sama na sebe,
- přímka neprocházející bodem S zobrazí na kružnici procházející bodem S,
- kružnice procházející bodem S zobrazí na přímku neprocházející bodem S,
- kružnice k neprocházející bodem S zobrazí na kružnici k' neprocházející bodem S, přičemž střed kružnice k se zobrazí do bodu, který není středem kružnice k'.

Úlohy

Závěrem využijeme probírané vlastnosti k řešení vybraných Apolloniových úloh.

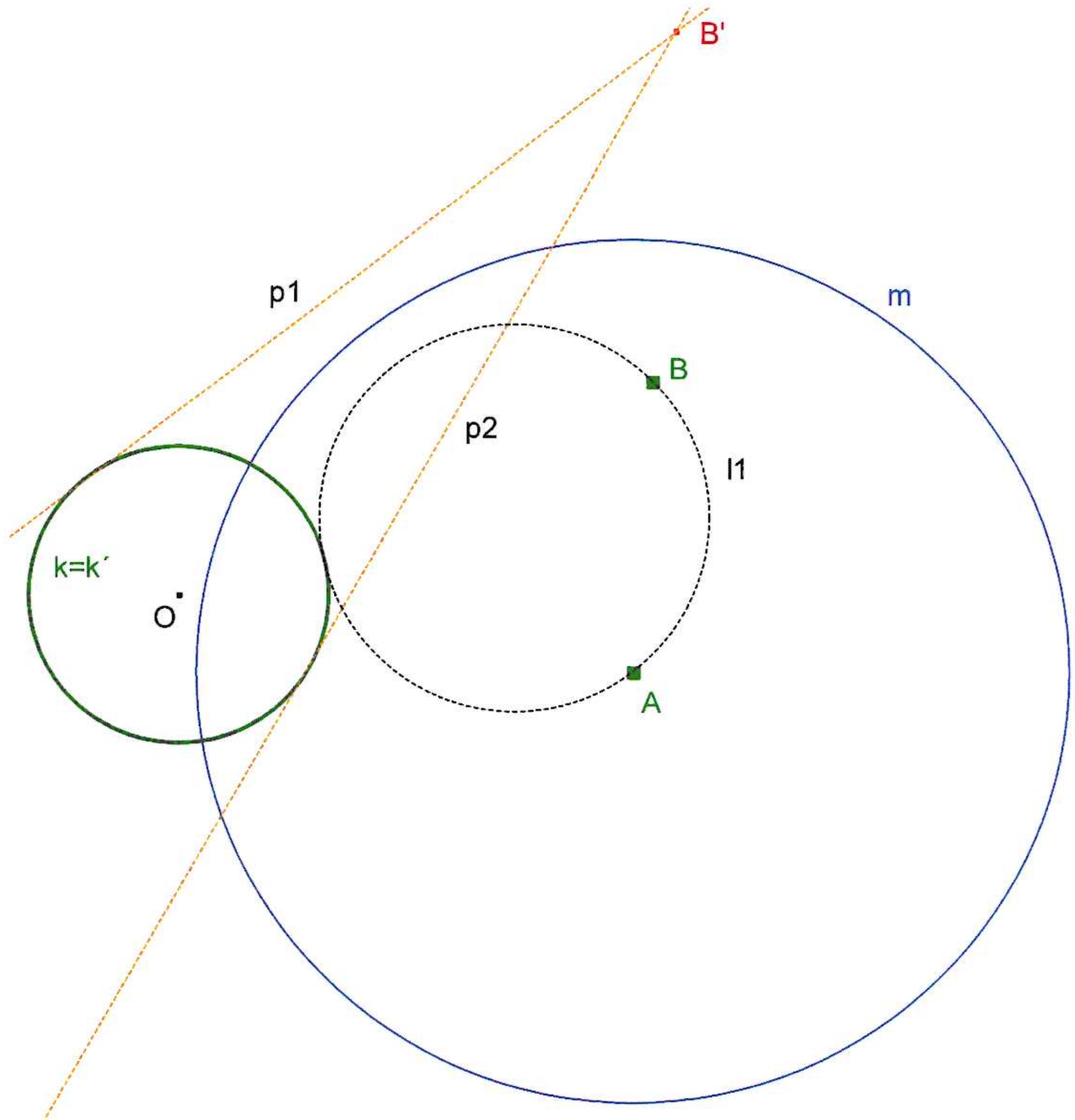
Úloha 1

Je dána kružnice $k\,(O; r)$ a různé body A a B, které leží v její vnější oblasti. Naší úlohou je sestrojit kružnici l, která se kružnice k dotýká a přitom prochází body A a B.


B
l1
k
O
A

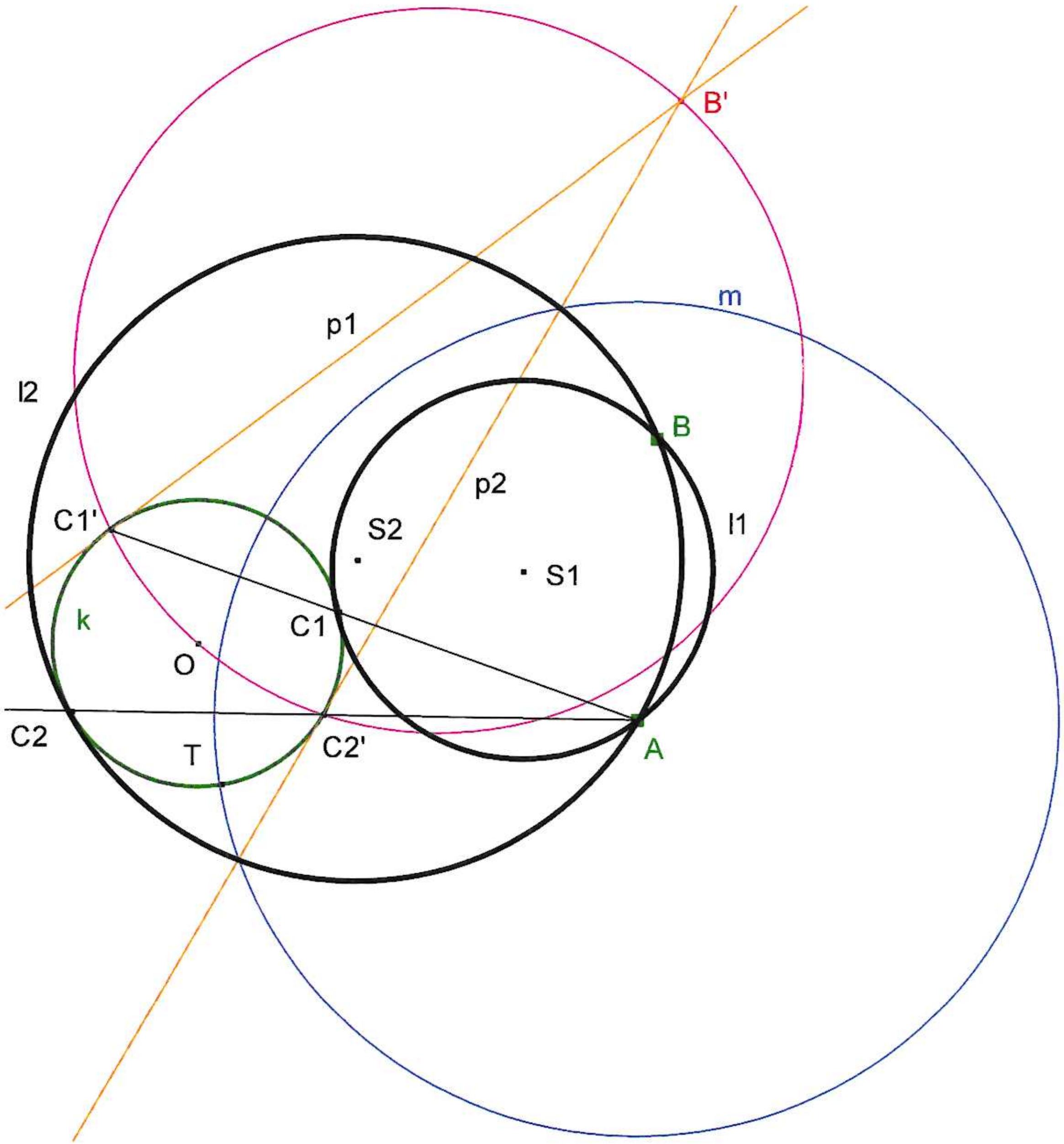
Řešení úlohy 1

Uvažujme kruhovou inverzi se středem v bodě A (její koeficient zvolíme později). Hledaná kružnice l bodem A prochází, proto se zobrazí na přímku, označme ji p. Kružnice k bodem A neprochází, proto se zobrazí na kružnici, označme ji k'. Označme ještě B' obraz bodu B v uvažované kruhové inverzi. Z předchozího víme, že kruhovou inverzi lze zvolit tak, aby $k = k'$, což bude pro konstrukci pohodlné (ale není to nutné). Kružnice takové kruhové inverze je v obrázku označena m. Protože kružnice k a l mají ze zadání jediný společný bod, musí mít také jejich obrazy $k' = k$ a p' opět jediný společný bod.


B'
p1
m
B
p2
l1
k=k´
O
A

Tím jsme ovšem řešený problém převedli na úlohu, kdy je úkolem sestrojit tečny kružnice k vedené bodem B', kterou umíme s využitím Thaletovy kružnice nad průměrem OB' řešit. Dotykové body těchto tečen jsou označeny C_1' a C_2'. Dotykové body C_1 a C_2 kružnic k a l najdeme pomocí opětovného zobrazení bodů C_1' a C_2' v kruhové inverzi. Body C_1 a C_2 proto leží v průsečících polopřímek $\overrightarrow{AC_1'}$ a $\overrightarrow{AC_2'}$ s kružnicí k (různých od bodů C_1' a C_2'). Dokončení konstrukce, totiž sestrojení kružnice procházející třemi různými body, které už nyní známe, je již zřejmé.

Doplňme, že úloha má 0—2 řešení podle toho, kolik existuje tečen kružnice k vedených bodem B'.

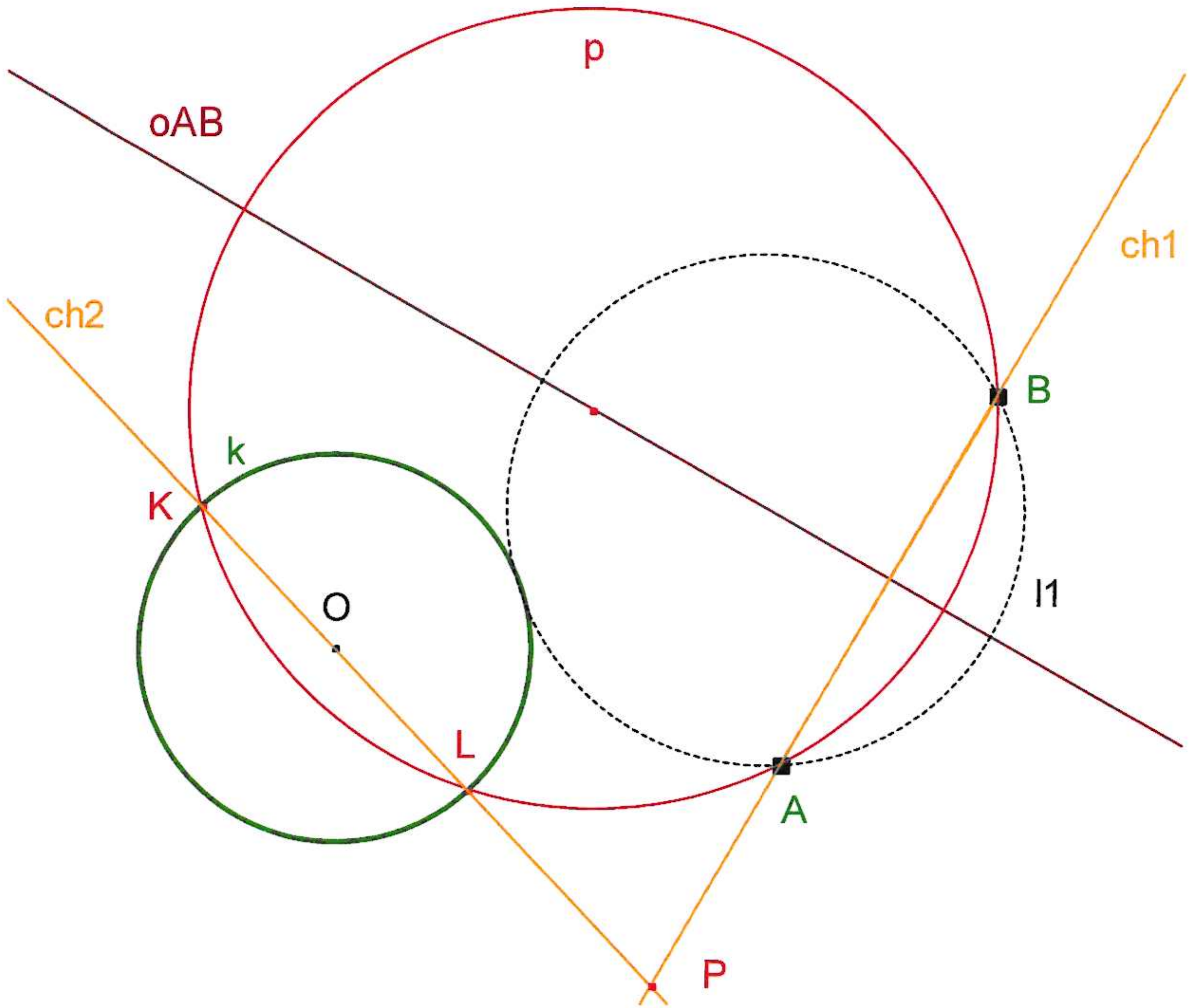

B'
m
p1
l2
B
p2
l1
C1'
S2
S1
k
C1
O
C2
T
C2'
A

Řešení úlohy 1 bez užití kruhové inverze

Uvažujme pomocnou kružnici p, která prochází body A a B a zadanou kružnici k protíná ve dvou bodech (označme je K a L). Střed kružnice p tedy leží na ose úsečky AB.

Přímka $\overleftrightarrow{AB}$ je tedy chordálou pomocné kružnice p a hledané kružnice l. Podobně přímka $\overleftrightarrow{KL}$ je chordálou kružnice p a zadané kružnice k.

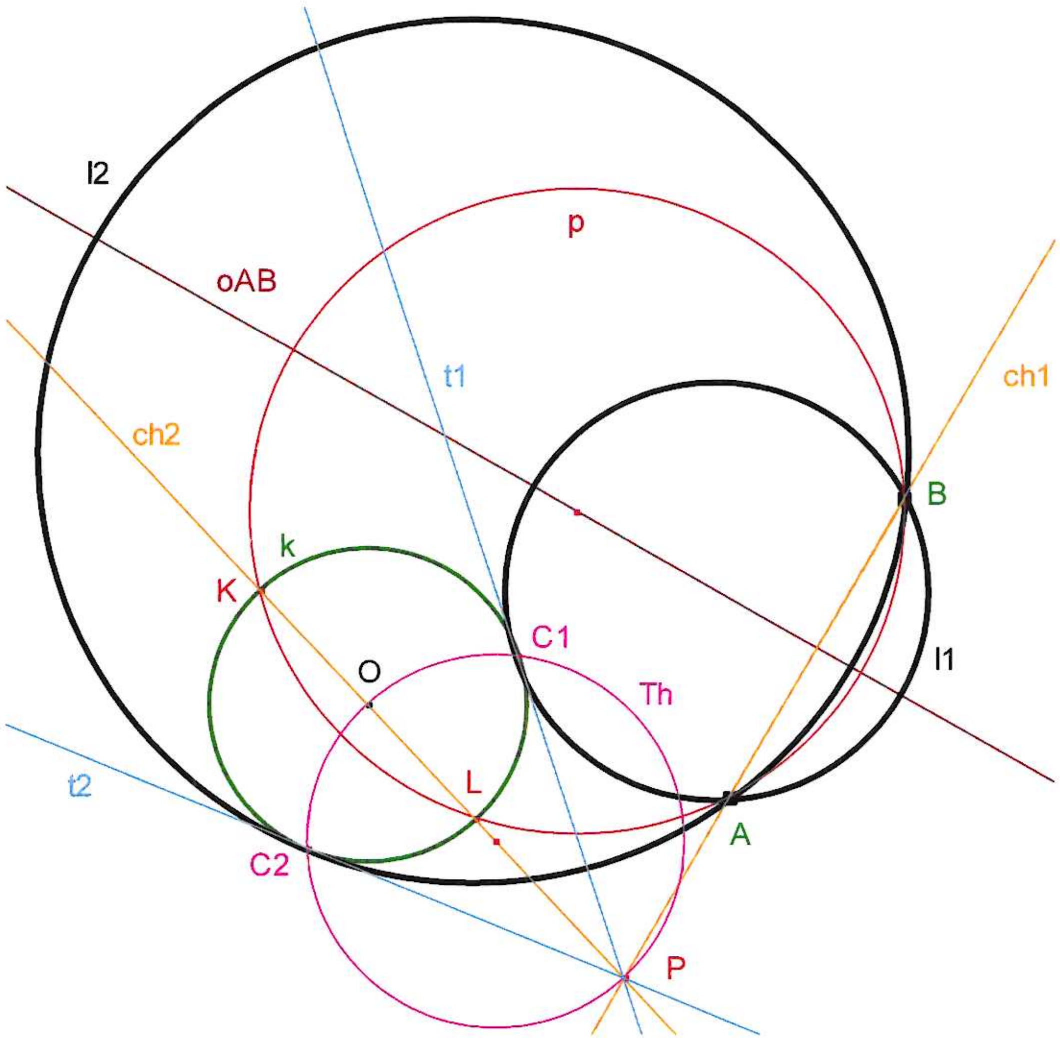
Jejich průsečík - bod P - je proto chordickým středem kružnic k, l a p. Jde o bod, který má ke všem těmto kružnicím stejnou mocnost.


p
oAB
ch1
ch2
B
k
K
O
l1
L
A
P

Hledaný dotykový bod C zadané kružnice k a hledané kružnice l leží na jejich společné tečně, která musí procházet bodem P, neboť tato tečna je současně chordálou kružnic k a l.

Bod C tedy získáme pomocí sestrojení Thaletovy kružnice nad průměrem OP.

Dokončení konstrukce je v této fázi řešení rutinní úkol.



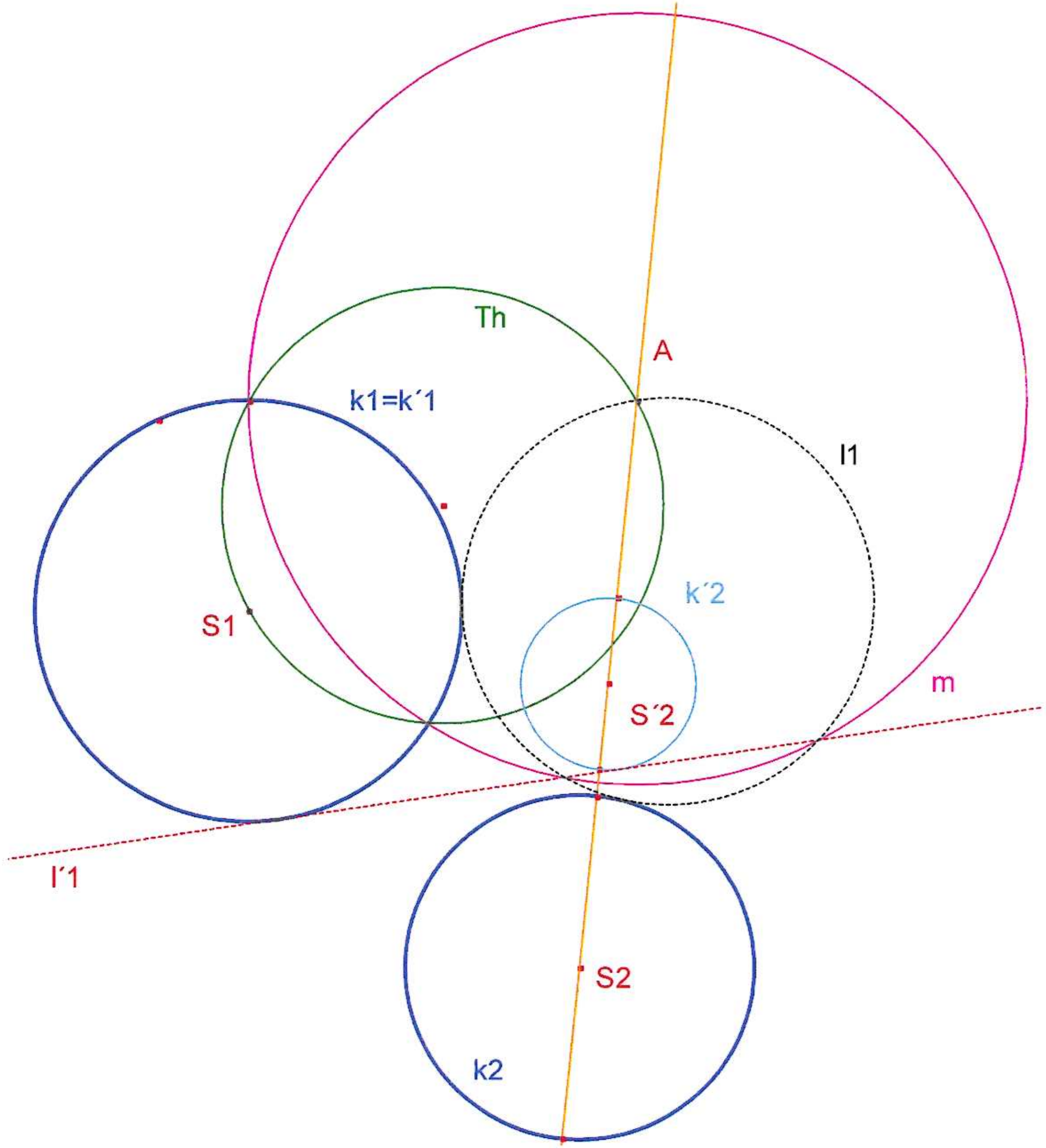
l2
p
oAB
t1
ch1
ch2
B
k
K
C1
l1
O
Th
L
t2
A
C2
P

Úloha 2

Jsou dány kružnice $k_1\,(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ a bod A, který neleží na žádné z těchto kružnic. Naší úlohou je sestrojit kružnici l, která se dotýká kružnic k_1 a k_2 a přitom prochází bodem A.

Řešení úlohy 2

Uvažujme kruhovou inverzi se středem v bodě A (její koeficient zvolíme později). Hledaná kružnice l bodem A prochází, proto se zobrazí na přímku, označme ji l', která bodem A neprochází. Kružnice k_1 ani kružnice k_2 bodem A neprochází, proto se zobrazí na kružnice, označme je k_1' a k_2'. Z předchozího víme, že kruhovou inverzi lze zvolit například tak, aby $k_1 = k_1'$. Kružnice této kruhové inverze je v obrázku označena m.



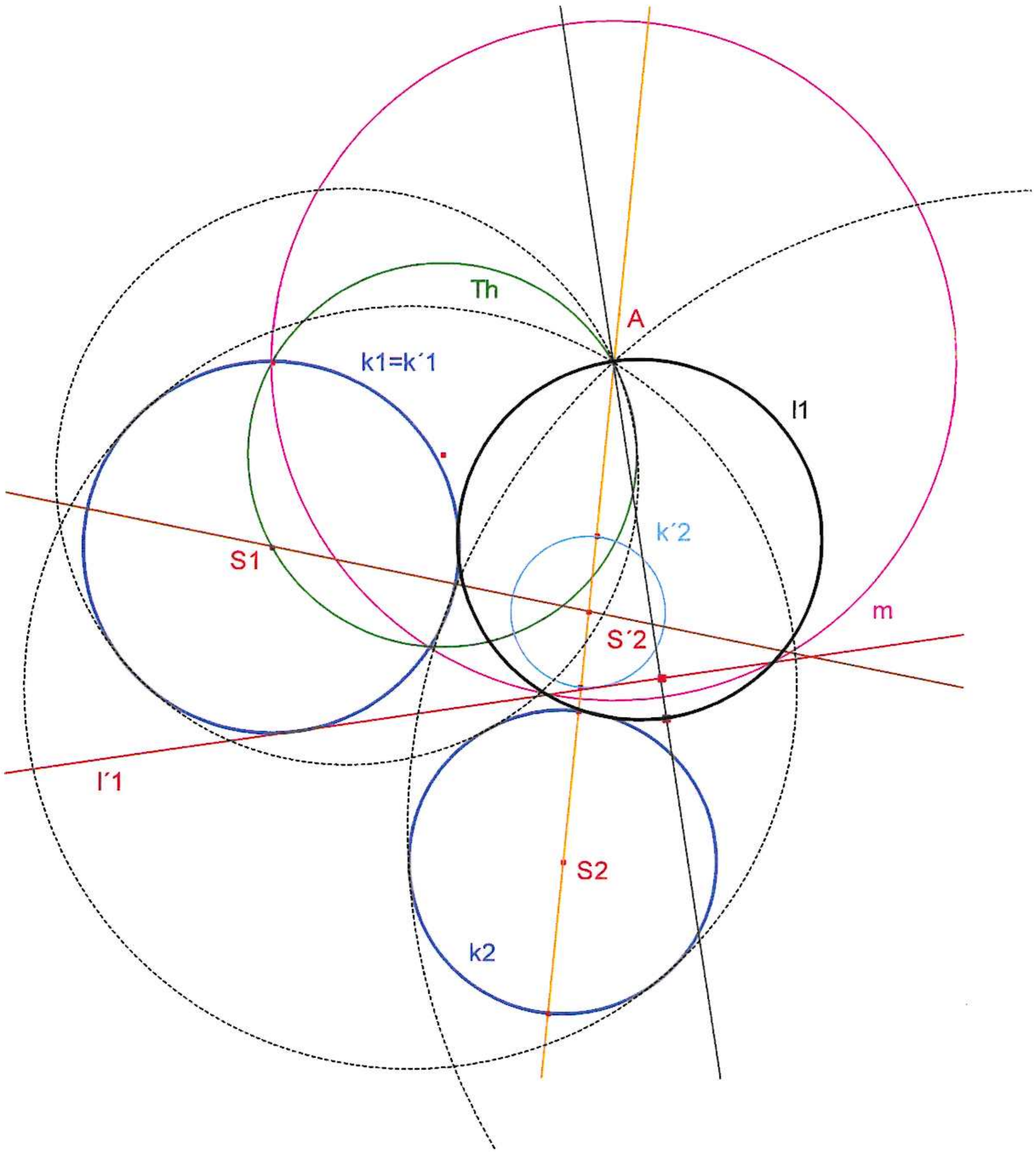
Th
A
k1=k´1
l1
S1
k´2
m
S´2
l´1
S2
k2

Protože kružnice k_1 a l a také kružnice k_2 a l se dotýkají, musí mít jediný společný bod rovněž jejich obrazy: tedy přímka l' jak s kružnicí k_1', tak s kružnicí k_2'.

To tedy znamená, že hledáme společné tečny dvou kružnic, což je úloha, která se ve středoškolské výuce probírá.

Odtud je patrné, že zadaná úloha má $0-4$ řešení podle toho, kolik existuje společných tečen kružnic k_1' a k_2'.

Z důvodu lepší přehlednosti jsou v obrázku naznačeny dílčí konstrukce jen pro jedno řešení - kružnici k_1, která je zobrazena plnou čárou.



Th
A
k1=k´1
l1
k´2
S1
m
S´2
l´1
S2
k2

Odkazy:

[1] A. Kobza: *Pozoruhodné vlastnosti kruhové inverze*, **Učitel matematiky**, roč. **22** (2013), číslo 1 (89), 15 – 26

[2] S. Novák: *Další pozoruhodné vlastnosti kruhové inverze*, **Učitel matematiky**, roč. **25** (2017), číslo 3 (103), 156 – 163