XXI. seminář o filosofických otázkách matematiky a fyziky

Velké Meziříčí 22. srpna 2024

Teoretická mechanika ve třech knihách

kontext, koncept a obsah nové univerzitní učebnice

Jiří Podolský
Ústav teoretické fyziky MFF
Univerzita Karlova, Praha

struktura přednášky

- stručné dějiny teoretické mechaniky
- stručné dějiny pražské výuky teoretické mechaniky
- dnešní výuka teoretické mechaniky na MFF UK

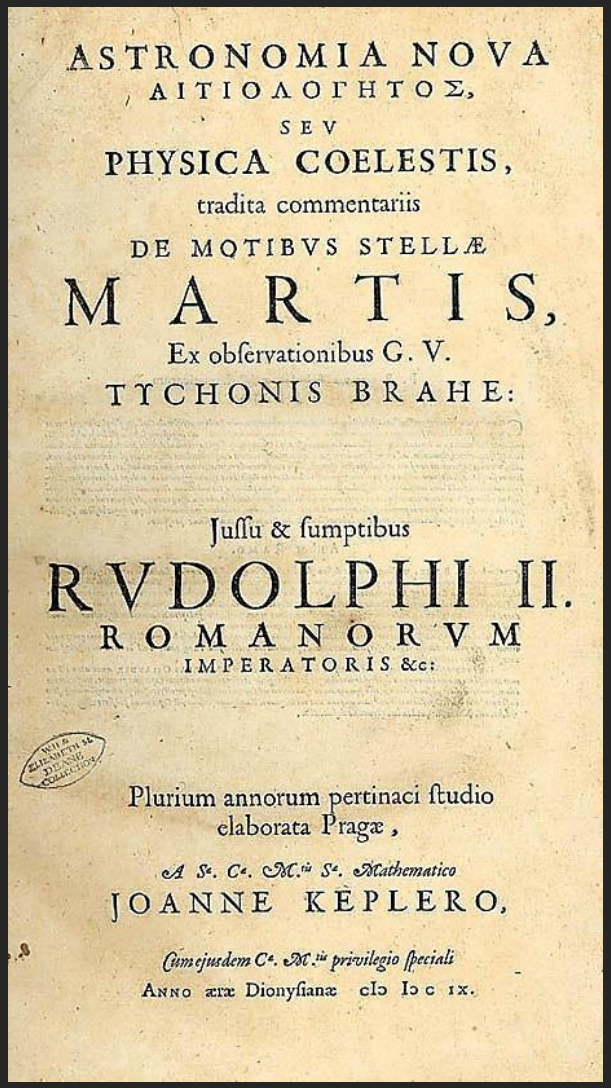
stručné dějiny
teoretické mechaniky

Kepler

- na půdě Karlovy univerzity
  v Koleji krále Václava u rektora Bacháčka
- našel zákon ploch a eliptickou orbitu Marsu

- dílo dokončeno 1605 a vydáno 1609

Astronomia nova


ASTRONOMIA NOVA
AITIOΛOΓHTOΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

Juſſu & ſumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,
A Sc. Cæ. M.ti Sc. Mathematico
JOANNE KEPLERO,
Cum ejusdem Cæ. M.ti privilegio ſpeciali
ANNO æræ Dionyſianæ clɔ Iɔ c ix.

Keplerova elipsa v *Astronomia nova* 1609

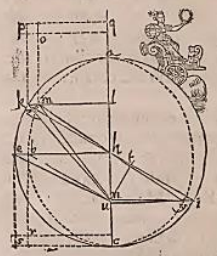
CAP. LIX.

PROTHEOREMATA.

I.

SI intra circulum describatur ellipsis, tangens verticibus circulum, in punctis oppositis; & per centrum & puncta contactuum ducatur diameter; deinde a punctis aliis circumferentiæ circuli ducantur per pendiculares in hanc diametrum: eæ omnes a circumferentia ellipseos secabuntur in eandem proportionem.

Ex l. I. Apollonii Conicorum pag. XXI. demonstrat COMMANDINVS *in commentario super V. Sphæroideon* ARCHIMEDIS.



Sit enim circulus AEC. *in eo ellipsis* ABC *tangens circulum in* A C. *& ducatur diameter per* A. C. *puncta contactuum, & per* H *centrum. Deinde ex punctis circumferentiæ* K. E. *descendant perpendiculares* KL, EH, *secta in* M.B. *a circumferentia ellipseos. Erit ut* BH *ad* HE, *sic* ML *ad* LK. *& sic omnes aliæ perpendiculares.*

II.

Area ellipsis sic inscriptæ circulo, ad aream circuli, habet proportionem eandem, quam dictæ lineæ.

Vt enim BH *ad* HE, *sic area ellipseos* ABC *ad aream circuli* AEC. *Est quinta Sphæroideon* ARCHIMEDIS.

III.

Si a certo puncto diametri educantur lineæ in sectiones ejusdem perpendicularis, cum circuli & ellipseos circumferentia; spacia ab iis resciſſa rursum erunt in proportione sectæ perpendicularis.

Sit N *punctum diametri, &* KML *perpendicularis. connectantur signa* K.M. *cum* N. *Dico, ut* ML *ad* LK, *seu per. I. ut* BH, *ad* HE *diameter brevior ad longiorem, sic esse aream* AMN *ad* AKN. *Est enim* AML, *area ad* AKL *aream, ut* ML *ad* LK *per assumpta* ARCHIMEDIS *ad pr. V. Sphæroideon, quæ* COMMANDINVS *in commentariis ad hanc propositionem literis* C. D. *demonstrat. Triangulorum vero rectangulorum* NLM, NLK, *altitudo* NL *est eadem*

strana 286

eadem; & bases LM, LK. *igitur &* MLN *ad* KLN *est, ut* ML *ad* LK. *Per compositionem igitur tota area* AMN *ad totam* AKN, *est ut* ML *ad* LK. *Quod erat demonstrandum.* CAP. LIX.

IV.

Circulo per hujusmodi perpendiculares quot-
cunque in æquales a
quales dividitur; &
utuntur proportion

Nam circa vertices, ar
perpendicularium, quibus sese
minor tamen. Circa locos me
lipticus, quia minus curvatu

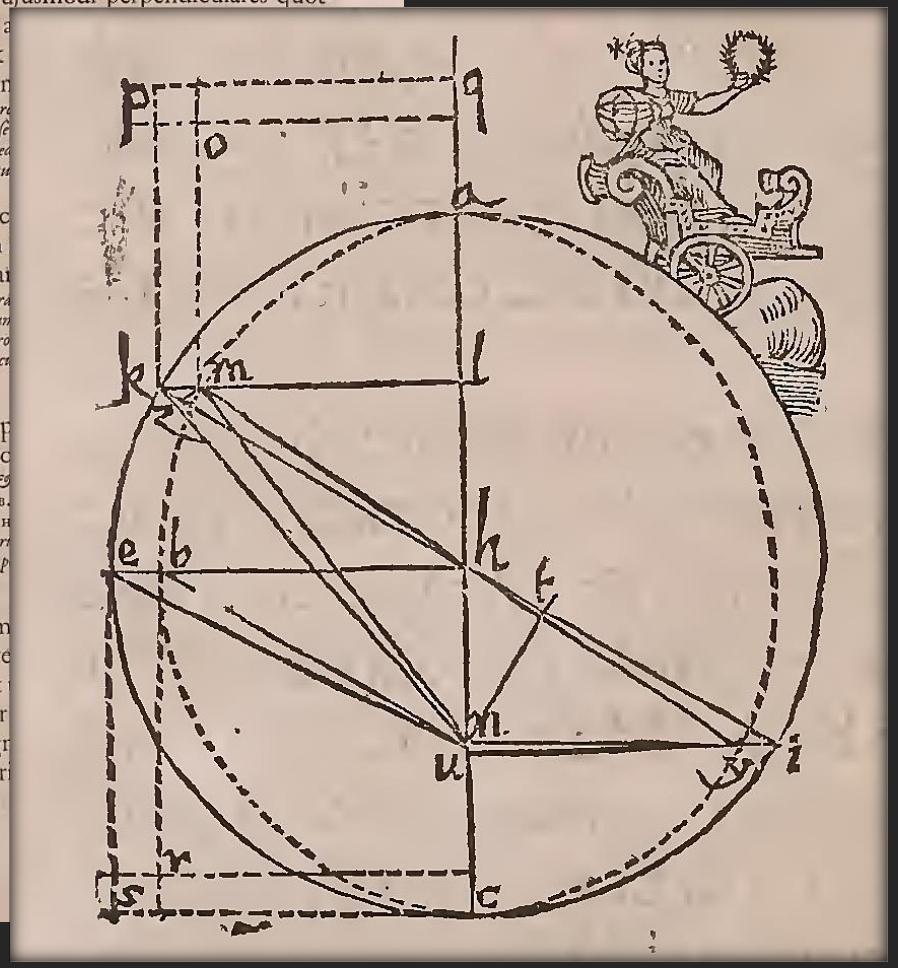
Tota elliptica c
um Arithmeticum
ris, & circulum dia

Probatum enim est supra
ea, cujus diameter est medium
circuli area, per VII. *Sphæro*
Sed & medium Arithmetic
ergo æqualia sunt ista.

Quadratorum p
mones sunt ad invic

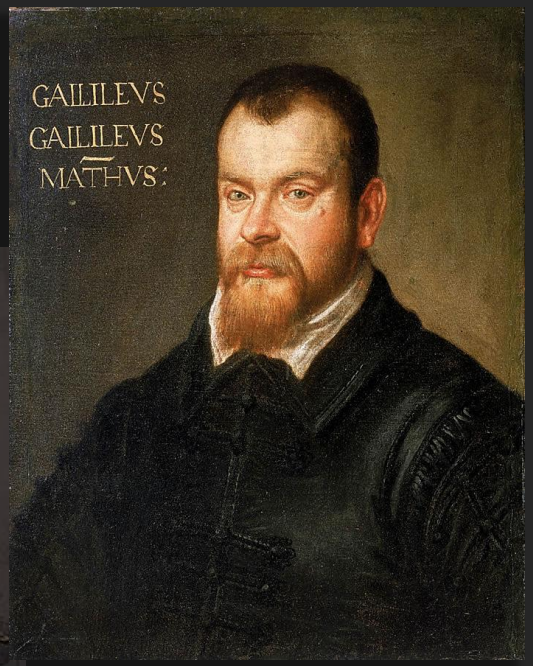
Sint duo quadrata PL &
portionaliter in punctis M.B.
quia ML *ad* LK *sic est, ut* BH
Sed gnomones sunt quadrator
monem, sic HS *ad suum: &* p
gnomonem CRE.

Si a termino sem
ferentia ellipsis, exte
tro longiori, sic ut
longiore: quæ inter
interjacet, potest gr
midiametri longiori
diametri brevioris.



Galileo: zákon zrychlení těles $s \sim t^2$ 1609

experimenty valení koulí
po nakloněných drahách



Galileo: zákon zrychlení těles $s \sim t^2$ 1609

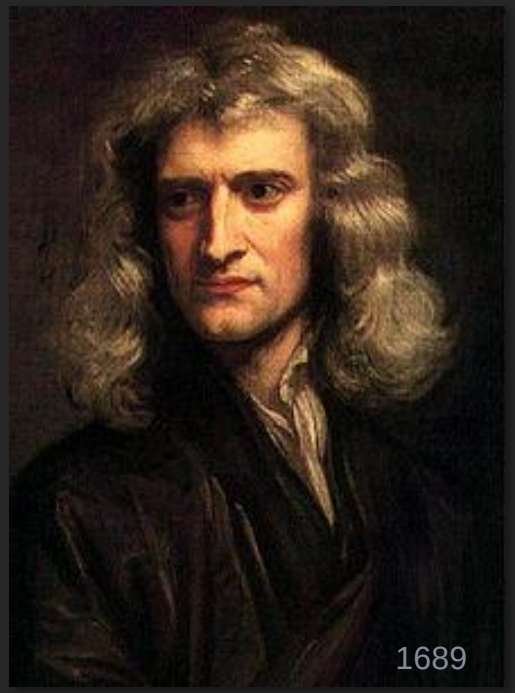
t

s

lichá čísla

Σ kvadráty

… pak přichází Newton



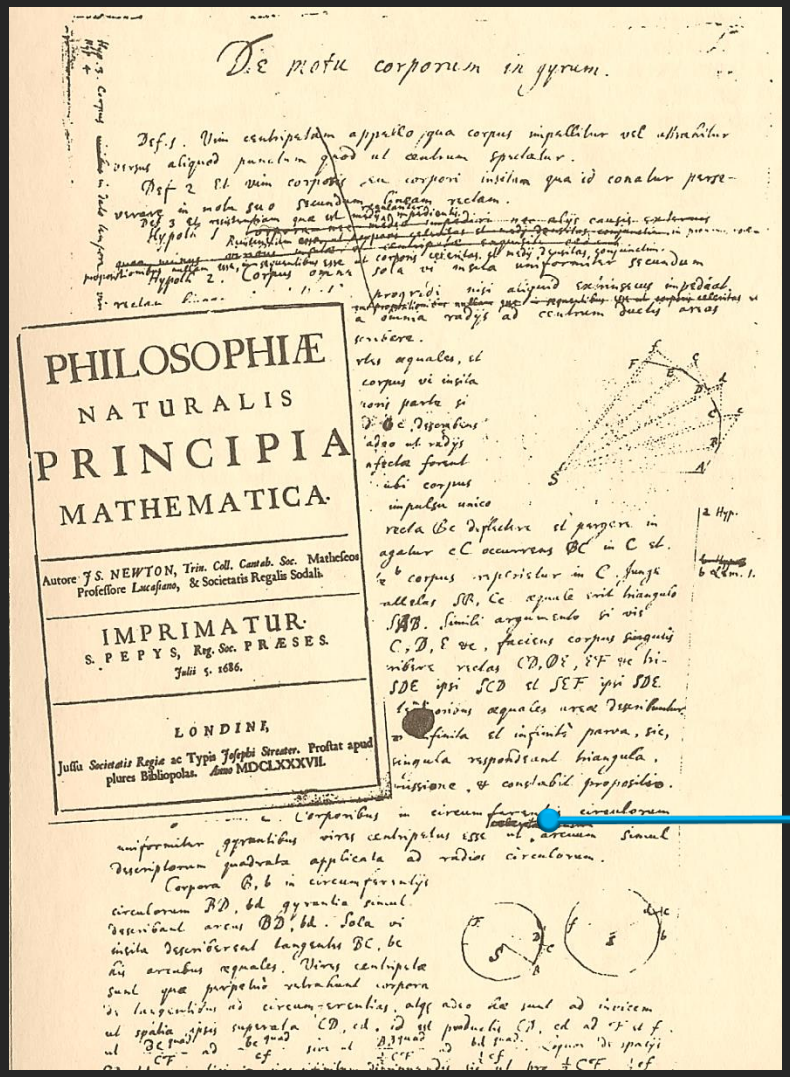
- 1666 koncept univerzální gravitace:
  „Měsíc padá k zemi stejně jako třeba jablko“

$$a \sim \frac{1}{r^2}$$

- 1684 Halleyho návštěva Cambridge: zákony pohybu a gravitační zákon v traktátu *De motu*, jádro *Principií*

- 1687 *Principia*: zásadní dílo v dějinách vědy

De motu corporum in gyrum 1684

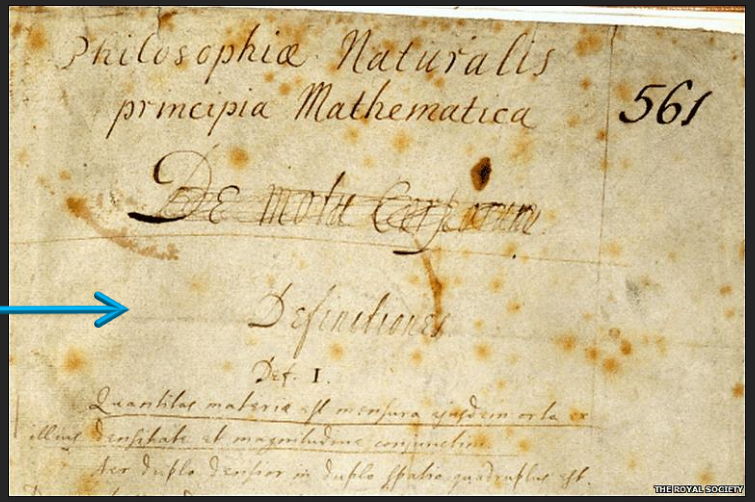


3 měsíce po Halleyově návštěvě v Cambridge mu Newton poslal do Londýna rukopis traktátu

O pohybu obíhajících těles (11 tvrzení)

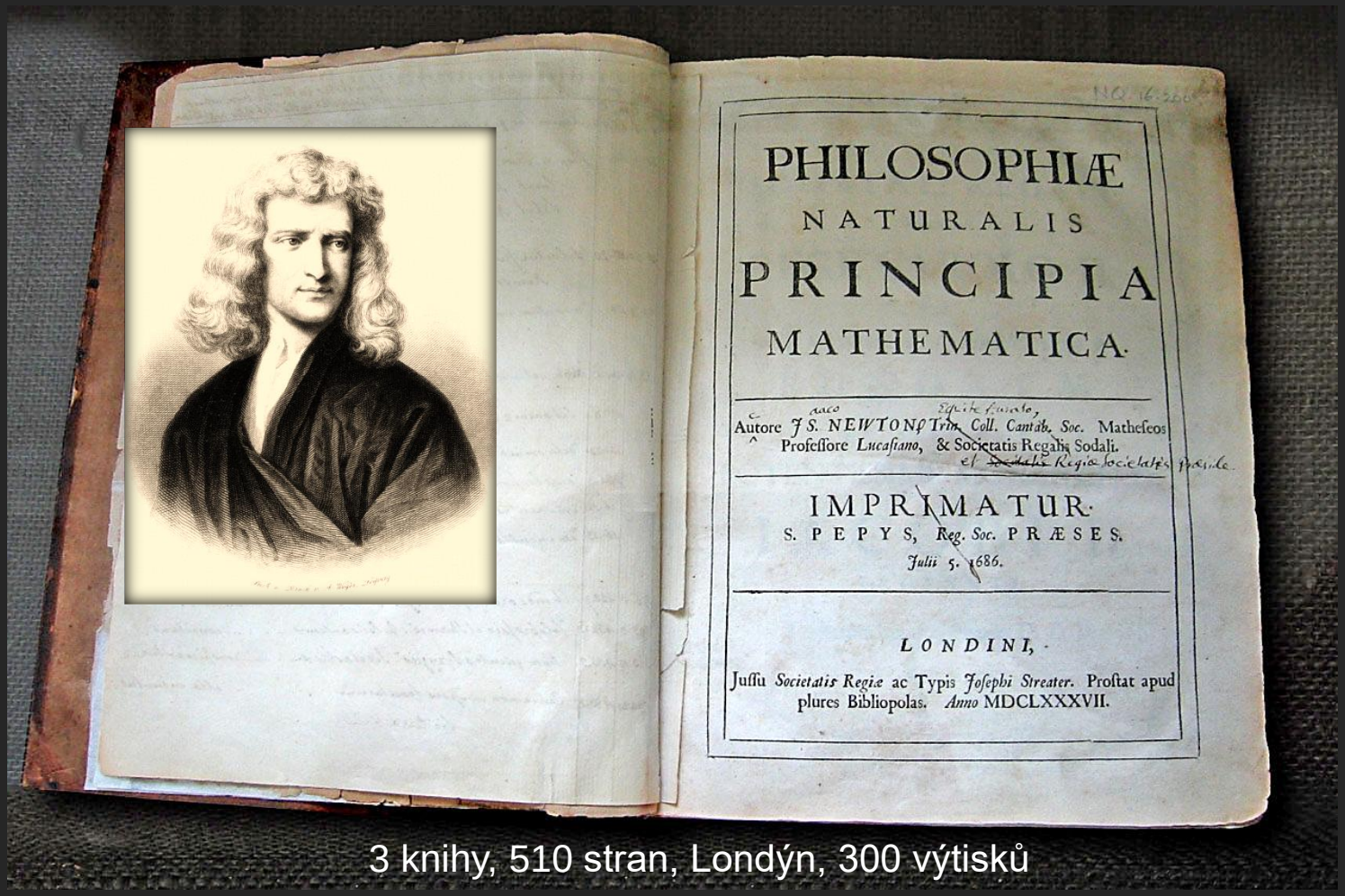
je to jádro přelomového díla

Philosophiæ naturalis principia mathematica



Matematické principy přírodní filozofie

Newton: *Principia* 1687



3 knihy, 510 stran, Londýn, 300 výtisků

imprimatur 5.7.1686, vyšlo v květnu 1687 na náklady Edmonda Halleyho

Newtonovy zákony pohybu

uvedeny na stranách 12 a 13

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Projectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur. Lex. III.

Lex. III.

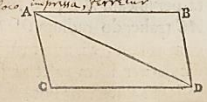
~~Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive~~ Corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit Equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum, tantumq; impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunq: mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum ſed motuum, (ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis:) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales. *Obtinet etiam hæc Lex in attractionibus ut in ſcholio proximo probabitur.*

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.

Si corpus dato tempore, vi ſola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi ſola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD* ſive vis *N* imprimatur, ſive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa



http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/25

Newtonovy zákony pohybu

originální latinské změní:

Lex. I. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

Lex. II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

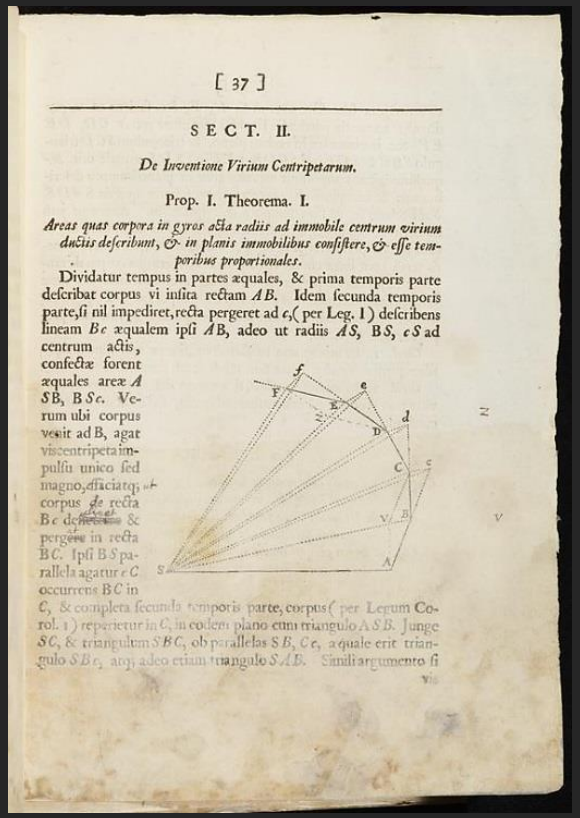
Lex. III. *Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.*

© I. Newton, 1687

Newtonův gravitační zákon

krok 1

2. Keplerův zákon je ekvivalentní tomu, že gravitační síla míří radiálně ke Slunci



[37]

SECT. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

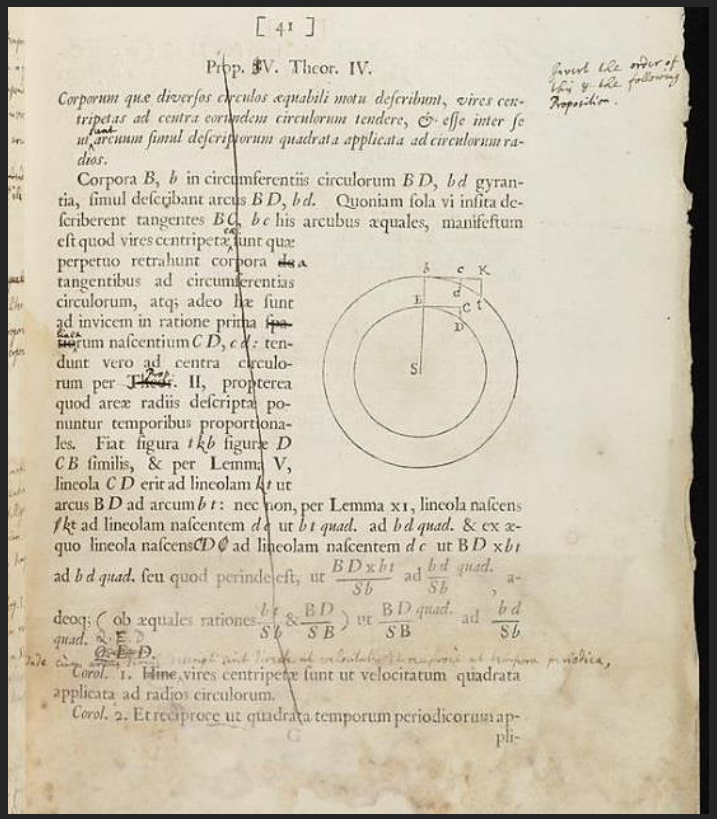
Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*, adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, facitque corpus de recta *Bc* deflectere & pergere in recta *BC*. Ipsi *BS* parallela agatur *cC* occurrens *BC* in *C*, & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas *SB*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si

Principia (kniha I, věta I, str. 37)

krok 2

ze 3. Keplerova zákona Newton odvodí, že síla klesá s kvadrátem vzdálenosti



[41]

Prop. IV. Theor. IV.

Corporum quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere, & esse inter se ut arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

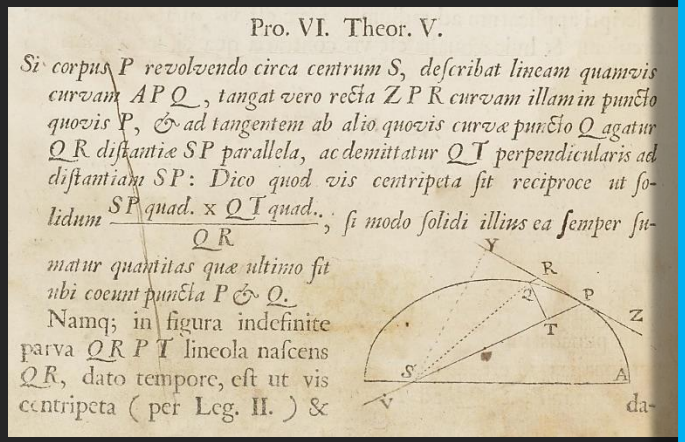
Corpora *B*, *b* in circumferentiis circulorum *BD*, *bd* gyrantia, simul describant arcus *BD*, *bd*. Quoniam sola vi insita describerent tangentes *BC*, *bc* his arcubus æquales, manifestum est quod vires centripetæ sunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atq; adeo hæ sunt ad invicem in ratione prima laterum nascentium *CD*, *cd*: tendunt vero ad centra circulorum per Prop. II, propterea quod areæ radiis descriptæ ponuntur temporibus proportionales. Fiat figura *tkb* figuræ *DCB* similis, & per Lemma V, lineola *CD* erit ad lineolam *kt* ut arcus *BD* ad arcum *bt*: nec non, per Lemma XI, lineola nascens *kt* ad lineolam nascentem *dc* ut *bt quad.* ad *bd quad.* & ex æquo lineola nascens *CD* ad lineolam nascentem *dc* ut $BD \times bt$ ad *bd quad.* seu quod perinde est, ut $\frac{BD \times bt}{Sb}$ ad $\frac{bd\ quad.}{Sb}$, adeoq; (ob æquales rationes $\frac{bt}{Sb}$ & $\frac{BD}{SB}$) ut $\frac{BD\ quad.}{SB}$ ad $\frac{bd\ quad.}{Sb}$.

Corol. 1. Hinc vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum.

Corol. 2. Et reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata

Principia (kniha I, věta IV, str. 41)

finále: Newton ověří Keplerovu elipsu

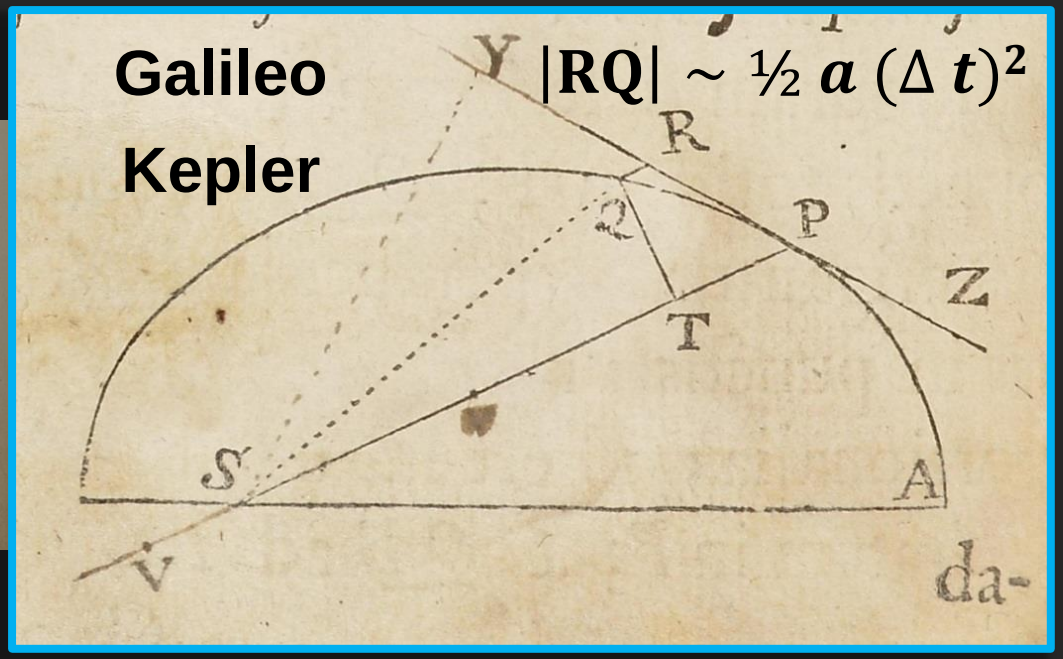


Pro. VI. Theor. V.

Si corpus P revolvendo circa centrum S, deſcribat lineam quamvis curvam A P Q, tangat vero recta Z P R curvam illam in puncto quovis P, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur Q R diſtantiæ S P parallela, ac demittatur Q T perpendicularis ad diſtantiam S P: Dico quod vis centripeta ſit reciproce ut ſolidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$, *ſi modo ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q.*

Namq; in figura indefinite parva Q R P T lineola naſcens Q R, dato tempore, eſt ut vis centripeta (per Leg. II.) &

Principia (kniha I, věta V, str. 44)



Galileo

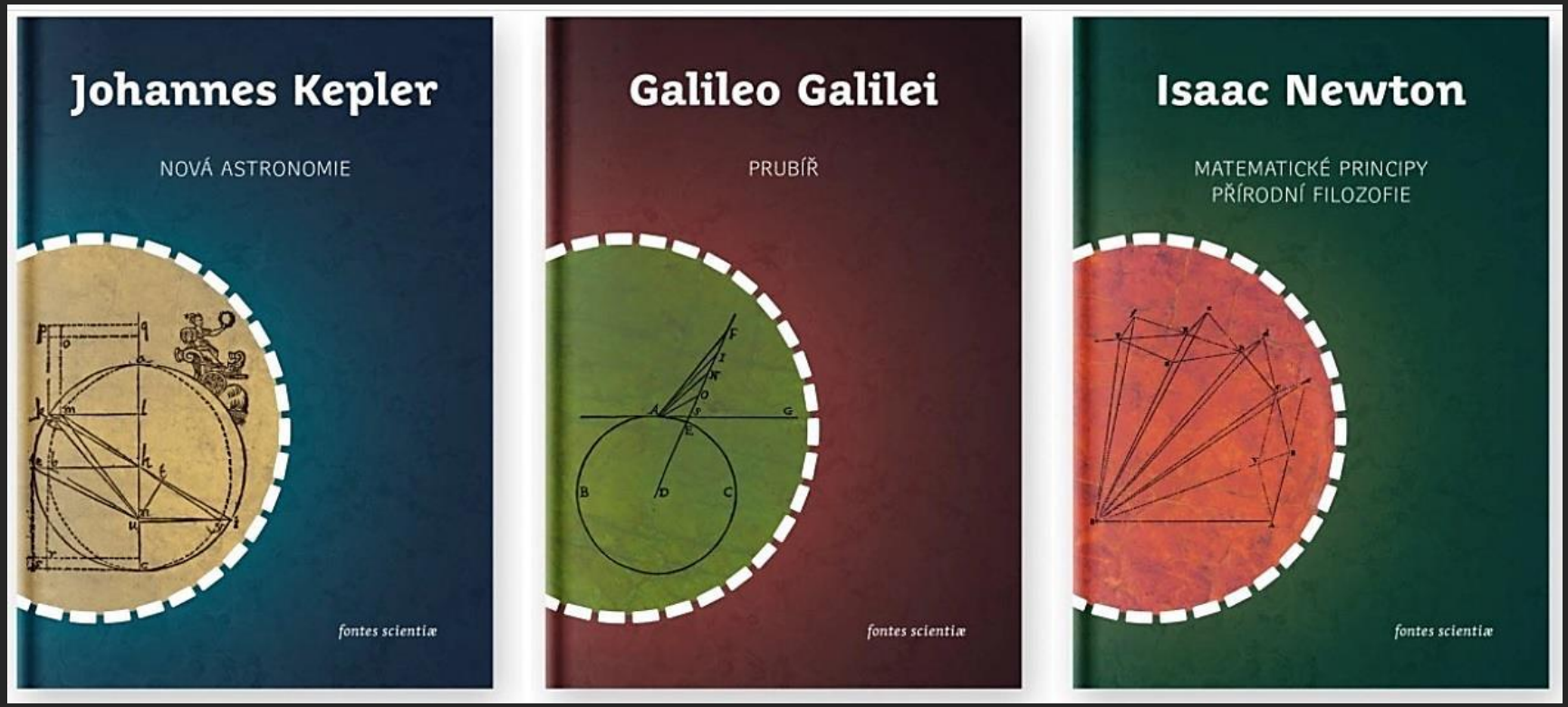
Kepler

$|\mathbf{RQ}| \sim \frac{1}{2}\, \boldsymbol{a}\, (\Delta\, \boldsymbol{t})^2$

1. Keplerův zákon je konzistentní s Newtonovým gravitačním zákonem

poděkování brněnským kolegům

nyní máme k dispozici moderní české překlady vybraných částí děl



2023 2020 2023

edice Fontes scientiæ nakladatelství Togga ve spolupráci s Masarykovou univerzitou

mezioborový projekt vedl doc. Daniel Špelda

z Katedry filozofie FF MU:

„ i úzce specializovaný vědec
se může zajímat o širší souvislosti
svého bádání a života

a filozof,
který ve své práci ignoruje
zjištění přírodních věd,
se sám odsuzuje k blábolení “

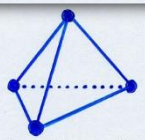
Newtonovo dědictví: klasická fyzika

- **prostor:** *spojitý, 3dim, euklidovský, homogenní a izotropní*

(dle teorie relativity je prostoročas neeuklidovský v přítomnosti gravitace, ale ve sluneční soustavě je toto zakřivení velmi malé)

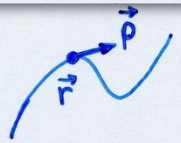
- **čas:** *spojitý, 1dim, rovnoměrný, jednosměrný, synchronizovaný*

(dle teorie relativity má každý pozorovatel svůj vlastní čas, ale pro malé rychlosti a daleko od hmotných těles všechny časy splývají)



- **objekty:** *idealizovány soustavou rozlišitelných hmotných bodů*

(v kvantové teorii jsou elektrony, fotony atd. nerozlišitelné, ale pro makroskopická tělesa platí standardní statistika)



- **stav:** *hmotného bodu určen jeho polohou a hybností*

(v kvantové mechanice je stav určen např. jen polohou, hybnost může být libovolná a lze určovat jen její pravděpodobnost; makroskopická tělesa za běžných teplot se však chovají klasicky)

základní pojmy
a jejich atributy

meze klasické fyziky
a jejich překonání

fyzika 20. století:

- teorie relativity
- teorie kvant

Newtonovo dědictví: analytická fyzika

precizní formulace fyzikálních zákonů pomocí
matematické analýzy: diferenciální a integrální počet, variační počet, …

Newtonův pohybový zákon je diferenciální rovnice

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$$

čas síla hybnost hmotnost rychlost

- pro konstantní m se redukuje na: $m\,\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$
- pro proměnné m složitější rovnice: hrabě Buquoy, 1812
- tento tvar pohybových rovnic platí i v teorii relativity
  jen zobecnění pojmů v širším kontextu: vlastní čas,
  čtyřsíla, čtyřhybnost, klidová hmotnost, čtyřrychlost

Newtonem to neskončilo
ale teprve začalo

i pokud jde o samotnou
klasickou mechaniku

v 18.–19. stol. byla klasická mechanika
rozšířena
z pohybů těles tedy hmotných bodů
na spojité prostředí tedy kontinuum

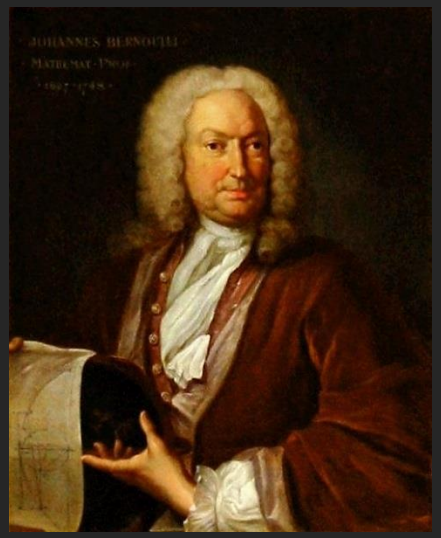
Euler 1707–1783

Cauchy 1789 –1857

a další

zdroj: Wikipedia

v 18.–19. stol. byla byla vyjádřena
v podobě obecných principů
diferenciálních ale také
integrálních – variačních

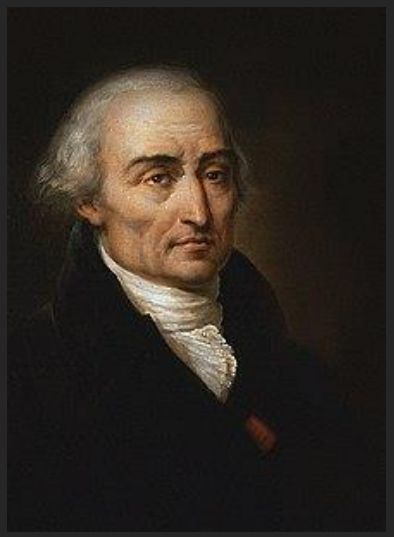


Bernoullliové Leibniz
1707–1783 1789 –1857

a další

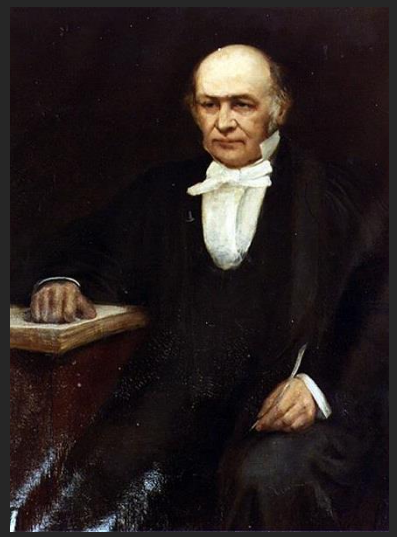
$$\delta S = 0$$

v 19. stol. byla zformulována
v analytické podobě
tedy oproštěna od eukleidovských vektorů
což umožnilo snadno pracovat s vazbami



Lagrange 1736 –1813

Hamilton 1805 –1865



a další

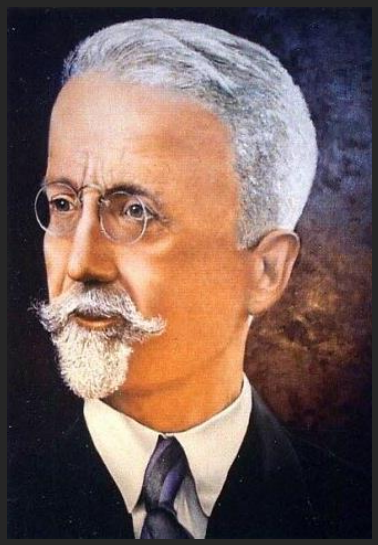
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$$

v 20. stol. byla přeložena
do jazyka diferenciální geometrie
tedy oproštěna od souřadnic
což umožnilo poznat symplektickou strukturu

Lie
1842–1899

Cartan
1869–1951



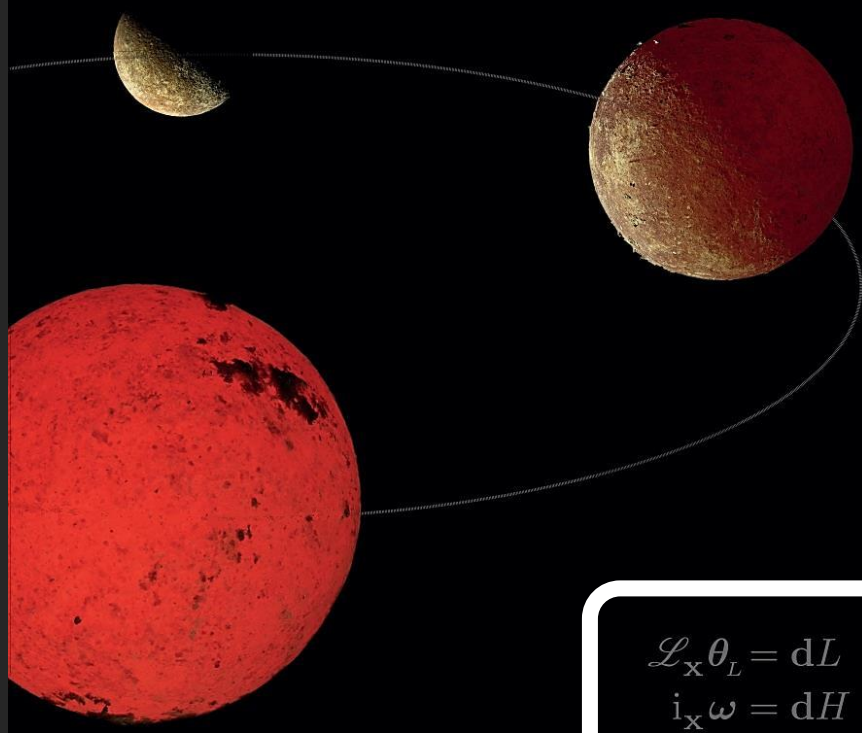
a další

$$\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\theta}_L = \mathbf{d}L$$
$$\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}H$$

TEORETICKÁ MECHANIKA VE TŘECH KNIHÁCH

JIŘÍ PODOLSKÝ

KAROLINUM / MATFYZPRESS

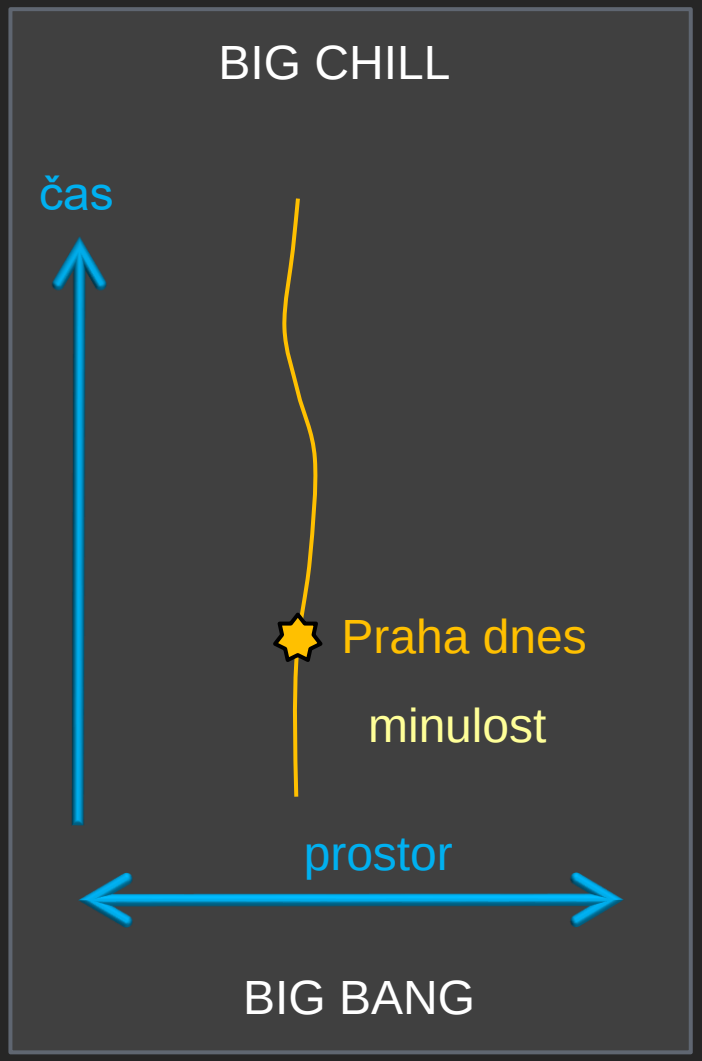


$$\mathscr{L}_{\mathrm{x}}\theta_{L} = \mathrm{d}L$$
$$\mathrm{i}_{\mathrm{x}}\omega = \mathrm{d}H$$

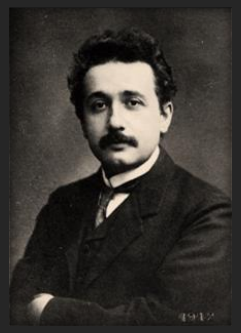
stručné dějiny pražské výuky teoretické mechaniky

pražský prostoročas:

zavazující tradice



1910



Einstein

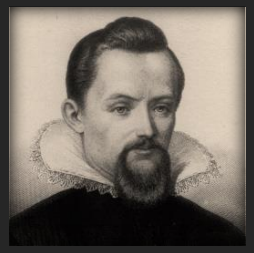
1880

Doppler

Mach

1600

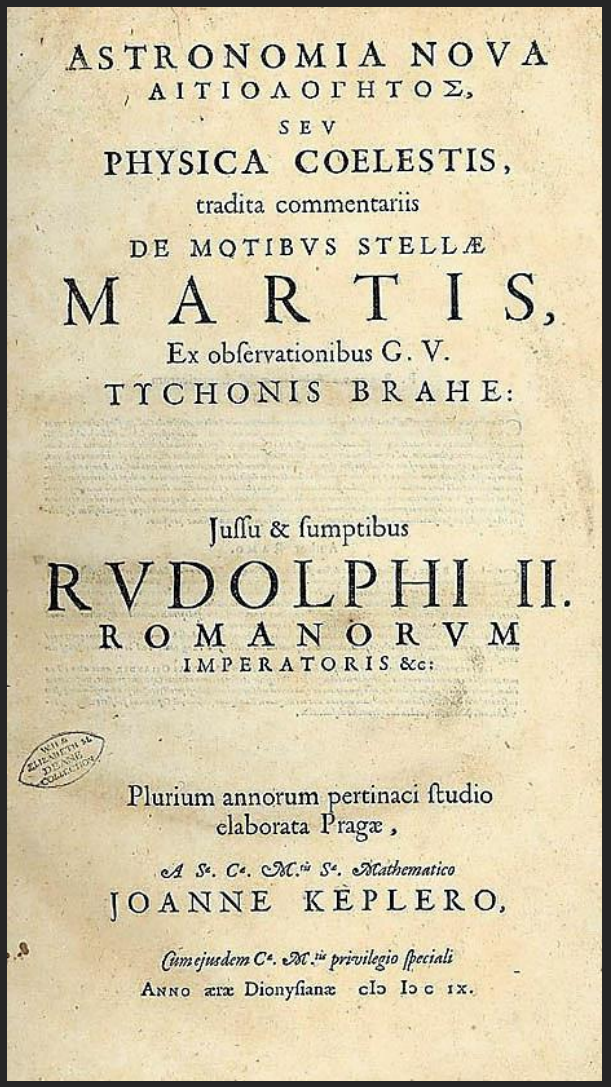
Brahe



Kepler

Johannes Kepler

v Praze 12 let (1600-1612)
císařský matematik
asociován s Universitou


ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

Juſſu & ſumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

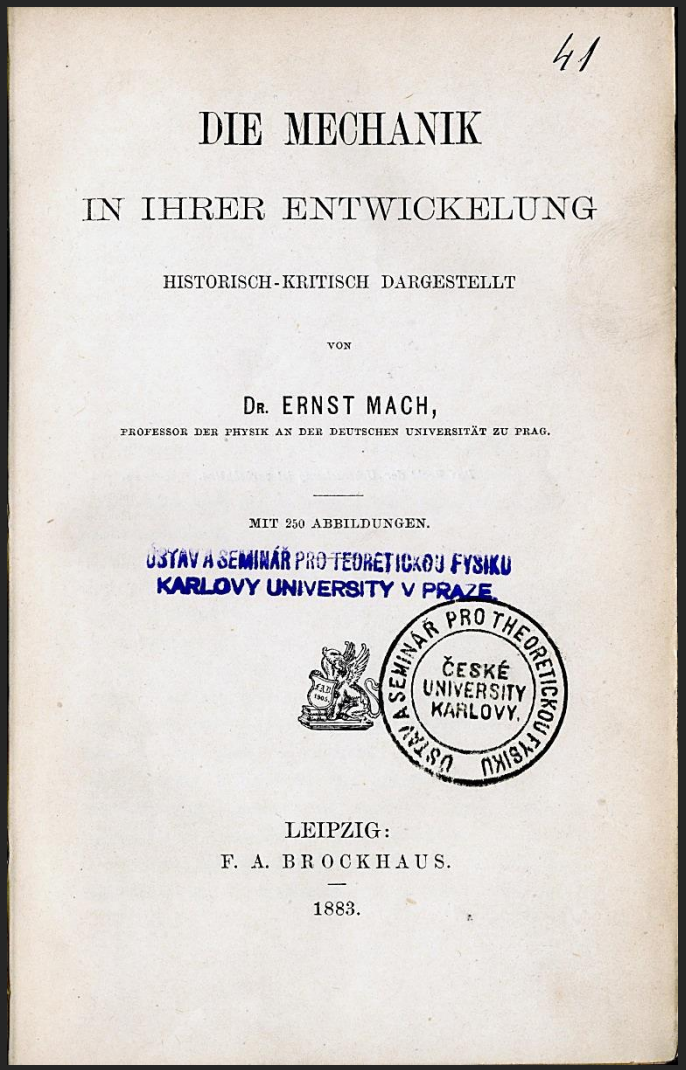
Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,
A Sæ. Cæ. Mtis Sæ. Mathematico
JOANNE KEPLERO,
Cum ejusdem Cæ. Mtis privilegio ſpeciali
Anno æræ Dionyſianæ clɔ Iɔ c ix.

Astronomia nova

zákony pohybu planet:
východisko Newtonových Principií

Ernst Mach

v Praze 28 let (1867-1895)
profesor experimentální fyziky,
pedagog, dvakrát rektor


41

DIE MECHANIK

IN IHRER ENTWICKELUNG

HISTORISCH-KRITISCH DARGESTELLT

VON

Dr. ERNST MACH,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER DEUTSCHEN UNIVERSITÄT ZU PRAG.

MIT 250 ABBILDUNGEN.

ÚSTAV A SEMINÁŘ PRO TEORETICKOU FYSIKU
KARLOVY UNIVERSITY V PRAZE
ÚSTAV A SEMINÁŘ PRO THEORETICKOU FYSIKU
ČESKÉ UNIVERSITY KARLOVY

LEIPZIG:
F. A. BROCKHAUS.
1883.

první vydání Machovy *Mechaniky*, Leipzig 1883

kritika newtonovské mechaniky, zejména
konceptu absolutního prostoru a pohybu
tzv. Machův princip byl velkou inspirací pro Einsteina:

"Mach jasně rozpoznal slabá místa klasické mechaniky, čímž se přiblížil požadavku obecné teorie relativity – a to před skoro půl stoletím!"

Einsteinův nekrolog Ernsta Macha
Physikalische Zeitschrift **17** (1916) 101

Albert Einstein

v Praze 1,5 roku (1911-1912)
profesor teoretické fyziky, pedagog

na německé Karlo-Ferdinandově univerzitě vyučoval 3 semestry:

*Mechanik diskreter Massenpunkte. 3stündig. Ord. Prof. Dr. **Einstein.**

*Thermodynamik. 2stündig. Ord. Prof. Dr. **Einstein.** Ort und Stunde beider Kollegien werden später angekündigt werden.

*Mechanik. 3stündig. Montag, Mittwoch, Freitag 9—10. Ord. Prof. Dr. **Einstein.** Klementinum II.

*Wärmelehre. 2stündig. Dienstag, Donnerstag 9—10. Ord. Prof. Dr. **Einstein.** Klementinum II.

4. Seminar für theoretische Physik.

Übungen im Seminare. 2stündig. Nach Vereinbarung. Ord. Prof. Dr. **Einstein.** Naturwissenschaftliches Institut.

*Molekulartheorie der Wärme. 3stündig. Montag, Dienstag, Mittwoch 9—10. Ord. Prof. Dr. **Einstein.** Hörsaal des mathematischen Seminars.

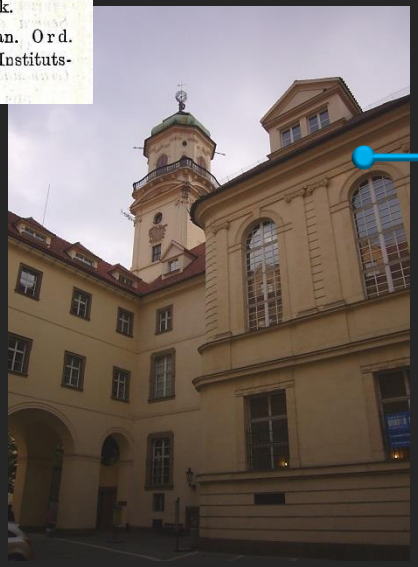
*Mechanik der Kontinua. 2stündig. Donnerstag, Freitag 9—10. Ord. Prof. Dr. **Einstein.** Hörsaal des mathematischen Seminars.

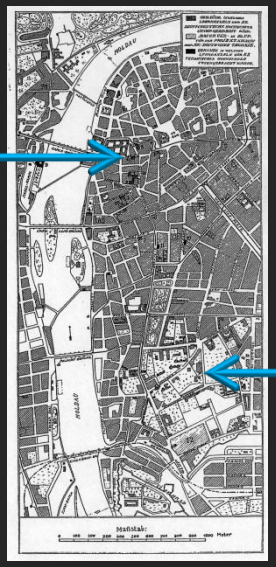
4. Seminar für theoretische Physik.

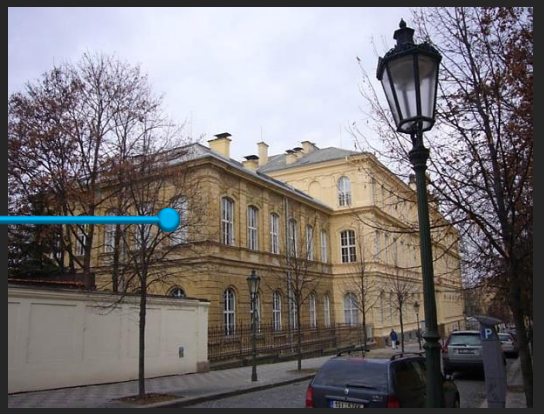
Übungen im Seminare. Freitag abends von 8 Uhr an. Ord. Prof. Dr. **Einstein.** Naturwissenschaftliches Institutsgebäude.

letní semestr 1911	
Mechanika hmotných bodů	3 hodiny
Termodynamika	2 hodiny
zimní semestr 1911	
Mechanika	3 hodiny, Klementinum
Nauka o teple	2 hodiny, Klementinum
Seminář pro teoretickou fyziku	2 hodiny, Viničná
letní semestr 1912	
Molekulová teorie tepla	3 hodiny, Viničná
Mechanika kontinua	2 hodiny, Viničná
Seminář pro teoretickou fyziku	pátek od 8 večer, Viničná

každý den
od 9 do 10
v Klementinu
nebo Viničné
tam vedl i semináře



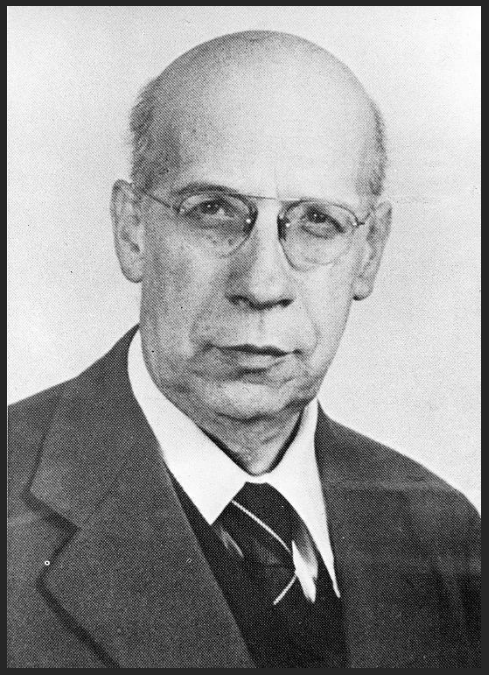




profesoři teoretické fyziky na KFU / Německé KFU a ředitelé matematicko-fyzikálního semináře

1874-1910
Ferdinand LIPPICH
(1838-1913)
profesor matematické fyziky
Štýrský Hradec-U. Praha

1911-1912
Albert EINSTEIN
(1879-1955)
profesor teoretické fyziky
U. Curych-U. Praha-ETH Curych



1912-1939
Philipp FRANK
(1884-1966)
profesor teoretické fyziky
U. Vídeň-U. Praha-U.Vídeň

převzato z Emilie Těšínská: Fyzika na Karlově univerzitě: instituce, osoby, studium (1850-1939)

profesoři matematické / teoretické fyziky na České univerzitě 1882-1939 (Karlově 1945)

1882-1891
Augustin SEYDLER
(1849-1891)
profesor matematické fyziky
a teoretické astronomie
KFU Praha-ČU Praha

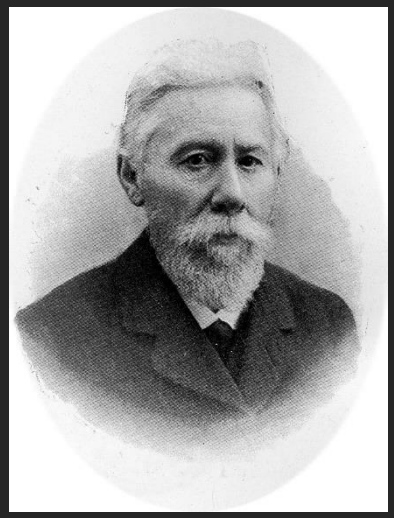
1882/83: **Matematicko-fyzikální seminář** → 1920 rozdělení

→ **profesura astronomie** : 1892 Gustav GRUSS….

profesura matematické (teoretické) fyziky
1908: Ústav pro teoretickou fyziku
1920: Ústav a seminář pro teoretickou fyziku

1922:druhá profesura TF

1939: třetí profesura TF



1891-1913
František KOLÁČEK
(1851-1913)
profesor matematické fyziky
střední škola Brno-ČU Praha-ČT Brno-ČU Praha

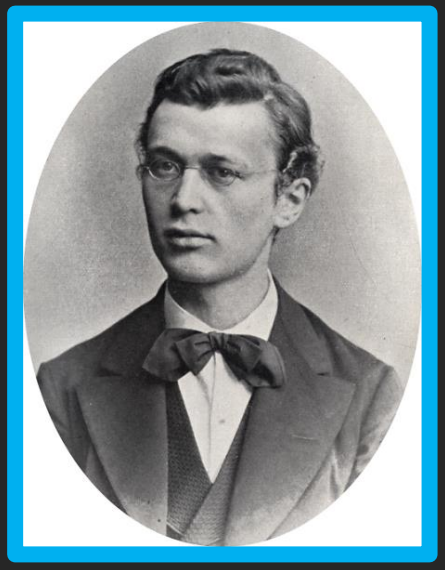
1914-1939 (1945)
František ZÁVIŠKA
(1879-1945)
profesor teoretické fyziky
ČU Praha

1922-1939 (1956)
Viktor TRKAL
(1888-1956)
druhá profesura teoretické fyziky
ČU Praha-(MFF UK)

převzato z Emilie Těšínská: Fyzika na Karlově univerzitě: instituce, osoby, studium (1850-1939)

profesoři matematické / teoretické fyziky

autoři učebnic teoretické mechaniky



Augustin SEYDLER
(1849-1891)

Viktor TRKAL
(1888-1956)

české učebnice teoretické mechaniky

- Seydler *Theoretická mechanika pro vysoké školy* 1880
- Kučera *Základy mechaniky tuhých těles* 1921
- Hostinský *Mechanika tuhých těles* 1924
- Trkal *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa* 1956
- Brdička *Mechanika kontinua* 1962
- Brdička, Hladík *Teoretická mechanika* 1987

- Brdička, Samek, Sopko *Mechanika kontinua* 2000
- Horský, Novotný, Štefaník *Mechanika ve fyzice* 2001
- a mnohé další …

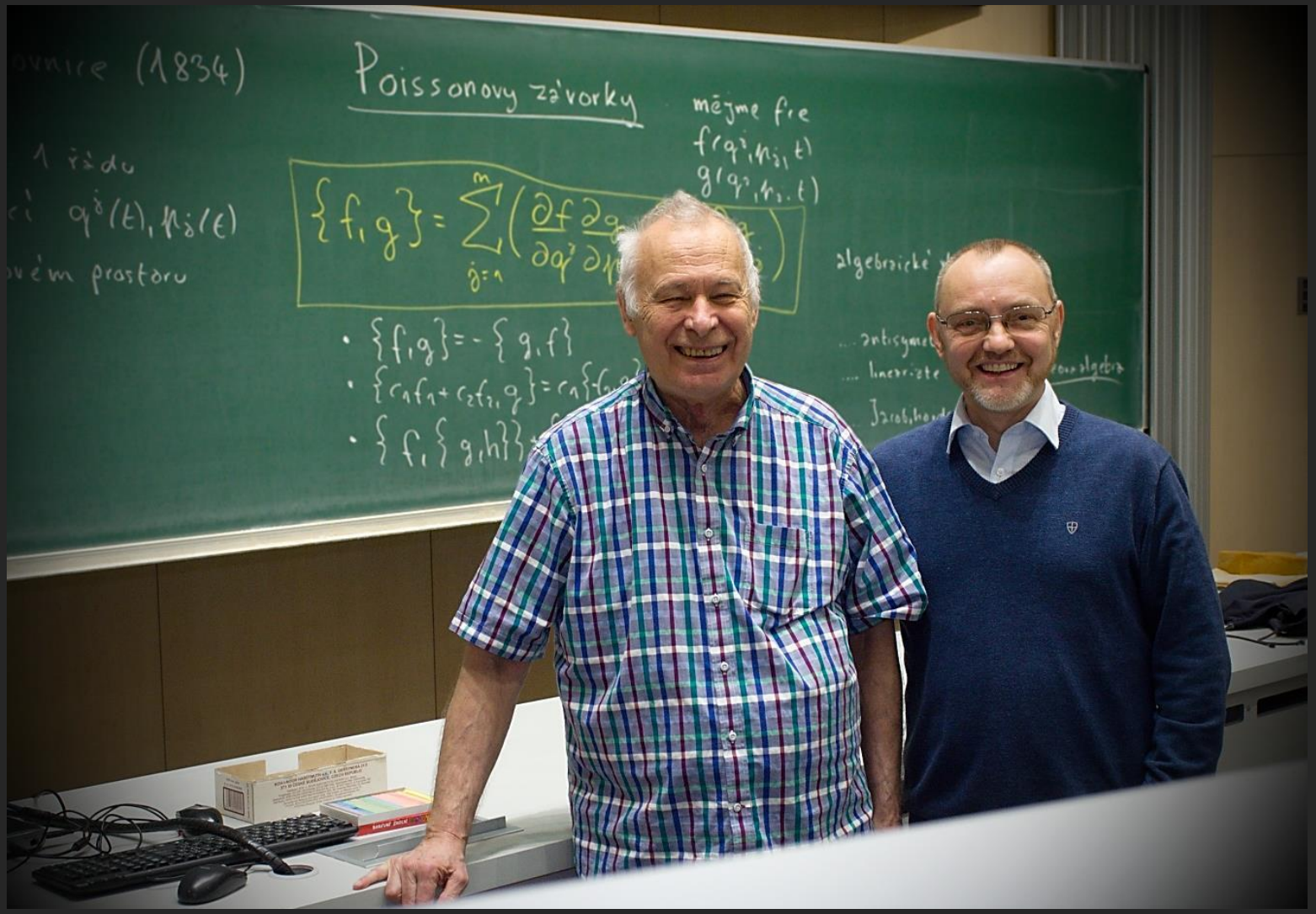
teoretická mechanika na MFF
od vzniku 1952

personální obsazení výuky dle vzpomínek J. Langera

vždy členové katedry/ústavu teoretické/matematické fyziky :

- Brdička — cca do roku 1960
- Hladík — 60. léta
- Langer — cvičení a od roku 1964 části přednášek
- Blank, Valenta — několikrát v 70. letech
- Langer — cca od roku 1980
- Podolský — od roku 1995

Jirka Langer a Jirka Podolský



3. 1. 2018

dnešní výuka
teoretické mechaniky
na MFF UK

- struktura výuky
- obsah výuky
- matematický aparát
- několik souvislostí
- popis nové učebnice

tisk konvolutu červen 2024, dnes oficiální uvedení

klasická přednáška NOFY003

2. rok studia studijní plán Bc. programu Fyzika

kód	Předmět		Kredity	ZS	LS
NOFY022	Optika		7	3/2 Z+Zk	—
NOFY024	Praktikum II — Elektřina a magnetismus		4	0/3 KZ	—
NOFY161	Matematika pro fyziky I		8	4/2 Z+Zk	—
NOFY003	Teoretická mechanika		7	3/2 Z+Zk	—
NOFY023	Speciální teorie relativity		3	2/0 Zk	—
NTVY016	Tělesná výchova III	1	1	0/2 Z	—
NOFY125	Atomová fyzika a elektronová struktura látek		5	—	3/1 Z+Zk
NOFY028	Praktikum III — Optika		5	—	0/4 KZ
NOFY162	Matematika pro fyziky II		8	—	4/2 Z+Zk
NOFY126	Klasická elektrodynamika		5	—	2/2 Z+Zk
NOFY127	Úvod do kvantové mechaniky		5	—	2/2 Z+Zk
NTVY017	Tělesná výchova IV	1	1	—	0/2 Z
NJAZ091	Anglický jazyk — zkouška pro bakaláře	2	1	—	0/0 Zk
NOFY062	*Pravděpodobnostní metody fyziky*		4	—	2/1 Z+Zk
NJAZ074	*Anglický jazyk pro středně pokročilé III*	2	1	0/2 Z	—
NOFY010	*Proseminář z optiky*		2	0/2 Z	—
NOFY069	*Proseminář z teoretické mechaniky*		2	0/2 Z	—
NOFY047	*Problémy současné fyziky I*		2	0/2 Z	—
NOFY059	*Experimentální metody fyziky I*		2	0/2 Z	—
NPOZ007	*Filozofické problémy fyziky*		1	0/1 Z	—

povinný předmět 2. rok
zimní semestr, 7 kreditů
rozsah výuky 3/2 Z+Zk

volitelný předmět
zimní semestr, 3 kredity
rozsah výuky 0/2 Z

zcela nová přednáška NOFY069 od roku 2004

klasická přednáška NOFY003

Statistika			
Akademický rok	semestr	# závazně zapsaných bez uznaných	# splněných (více)
2022/2023	zimní	105	96
	letní	-	-
2021/2022	zimní	91	89
	letní	-	-

Statistika			
Akademický rok	semestr	# závazně zapsaných bez uznaných	# splněných (více)
2022/2023	zimní	61	55
	letní	-	-
2021/2022	zimní	64	63
	letní	-	-

počty studentů

zcela nová přednáška NOFY069

tedy trojice propojených výuk mechaniky

klasická povinná přednáška 3 hodiny

klasické povinná cvičení 2 hodiny

jádrem je Lagrangeův a Hamiltonův formalismus ve standardní podobě

a k tomu

moderní volitelná přednáška 2 hodiny

hlavní cíl: teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie tedy vyjádření bez souřadnic !

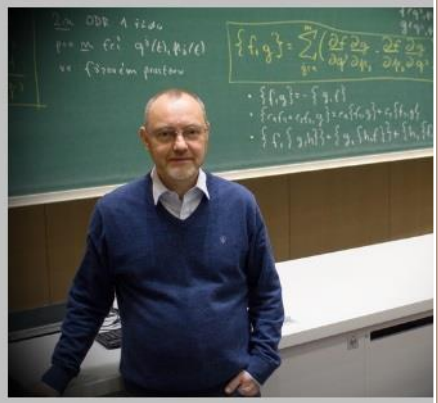
pokryto novou učebnicí

proto tři knihy

obsah přednášky

Teoretická mechanika

NOFY003, 3/2, Zk/Z
prof. Jiří Podolský



Anotace:

V přednášce se studenti seznámí s analytickými formulacemi klasické mechaniky hmotnýc
teorie kontinua. Jádrem výkladu je zavedení a pochopení Lagrangeova a Hamiltonova form
aplikací a pojmů klíčových pro kvantovou a relativistickou teorii.

Cíl předmětu:

Cílem předmětu je pochopení analytických formulací klasické mechaniky a jejich použití k

Obsah:

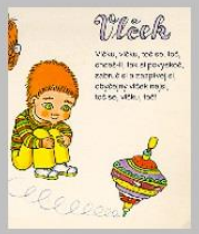
- 1. Předehra, motivace, nástin obsahu a opakování
- 2. Pohyb hmotných bodů podrobených vazbám
- 3. Lagrangeovy rovnice II.druhu
- 4. Pravidla, metody a triky Lagrangeova formalismu
- 5. Pohyb planet a další aplikace
- 6. Hamiltonův variační princip
- 7. Hamiltonovy kanonické rovnice a Poissonovy závorky
- 8. Kanonické transformace a Hamiltonova-Jacobiho teorie
- 9. Mechanika tuhého tělesa
- 10.Eulerovy rovnice a setrvačníky
- 11.Teorie kontinua
- 12.Základní veličiny a rovnice pro popis kontinua
- 13.Nejzajímavější důsledky rovnic kontinua

Předehra, motivace, nástin obsahu a opakování
Užitečnost alternativních formulací téhož problému ve fyzice. Ilustrace na teoriích gravitace: Newtonova gravitační síla -> Poissonova rovnice (pole potenciálu) -> Einsteinova rovnice (pole metriky, obecná teorie relativity). Teoretická mechanika jakožto vyslovování Newtonových pohybových zákonů jinými způsoby pro hmotné body, tuhé těleso i

Pravidla, metody a triky Lagrangeova formalismu
Kuchařka pro sestavení pohybových rovnic (vhodná volba zobecněných souřadnic, vyjádření T a V v těchto

Mechanika tuhého tělesa
Opakování vektorů a tenzorů v Euklidovském prostoru. Grupa konečných rotací a algebra infinitesimálních rotací. Jejich reprezentace pomocí antisymetrických matic a zavedení vektoru úhlové rychlosti jakožto duálu k nim. Otáčení tělesa kolem pevné osy, tenzor setrvačnosti. Vlastní čísla a vektory včetně interpretace elipsoidu setrvačnosti. Kinetická energie rotačního pohybu. Rozklad pohybu na translaci a rotaci (Chaslesova věta). Důsledek pro kinetickou energii (Koenigova věta). Drobná perlička: jednoduché odvození pohybových rovnic v neinerciálním systému z Lagrangeovy funkce.

Eulerovy rovnice a setrvačníky
Eulerovy úhly a Eulerovy kinematické rovnice. Lagrangeova funkce pro tuhé těleso a odvození Eulerových dynamických rovnic. Ukázkové příklady: analýza pohybu symetrického bezsilového setrvačníku.



Teorie kontinua
Přechod od soustavy hmotných bodů ke spojitému prostředí. Ilustrace: hustota Lagrangeovy funkce pro podélné kmity soustavy oscilátorů a příčné kmity struny. Odvození Eulerových-Lagrangeových pohybových rovnic pro spojité prostředí z Hamiltonova principu. Vlnová rovnice a základní metody jejího řešení: a) d'Alembertova metoda, b) separace proměnných (vlastní frekvence, okrajové a počáteční podmínky, Fourierova analýza). Perspektivy: klasická pole a jejich kvantování. Dva možné popisy pohybu kontinua: Lagrange versus Euler. Vektor posunutí a pole rychlosti.

Základní veličiny a rovnice pro popis kontinua
Připomenutí tenzoru malých deformací a tenzoru napětí. Pohybová rovnice obecného kontinua a rovnice kontinuity, podmínky rovnováhy. Reologická klasifikace látek (od tuhé látky po ideální tekutinu). Zobecněný Hookův zákon pro izotropní těleso s interpretací příslušných koeficientů.

Nejzajímavější důsledky rovnic kontinua
Pohybová rovnice izotropního prostředí. Eulerova pohybová rovnice ideální tekutiny a vlny v ní, odvození rychlosti zvuku. Bernoulliova rovnice jakožto 1.integrál. d'Alembertův hydrodynamické paradoxon pro nevířivou a nestlačitelnou ideální tekutinu. Navierova-Stokesova pohybová rovnice pro vazkou tekutinu. Ilustrace: proudění dlouhou trubicí (odvození parabolického rychlostního profilu a Poiseuillova-Hagenova zákona). Krátce o laminárním proudění versus turbulenci a Reynoldsově čísle.

Podmínky udělení zápočtu

nezbytný matematický aparát

- řešení (soustav) obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$$

- variační počet

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \,\mathrm{d}t = \; 0$$

- Lieovy algebry a grupy

$$\{f, g\} \equiv \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q^j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q^j} \right)$$

- lineární algebra a tenzorový počet

$$I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \sum_a m^a (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi}$$

- parciální diferenciální rovnice

$$H\left(q^j, \frac{\partial S}{\partial q^j}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

- Fourierovy řady

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)\left[a_n \cos\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi\frac{ct}{l}\right)\right]$$

- aparát diferenciální geometrie

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_L = \mathbf{d}L$$

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}H$$

další souvislosti teoretické mechaniky

- je klíčová pro navazující fyzikální obory
  kvantová mechanika, relativistická fyzika, teorie pole klasická i kvantová
- je nezbytná pro astronomii a vědy o Zemi
  nebeská mechanika, teorie kontinua (geofyzika, fyzika atmosféry)
- studenti se v ní přirozeně seznamují s užitečností velké šíře matematických metod
- lze v ní pěkně ilustrovat dějinný vývoj fyzikálního myšlení i matematického formalismu

TEORETICKÁ MECHANIKA VE TŘECH KNIHÁCH

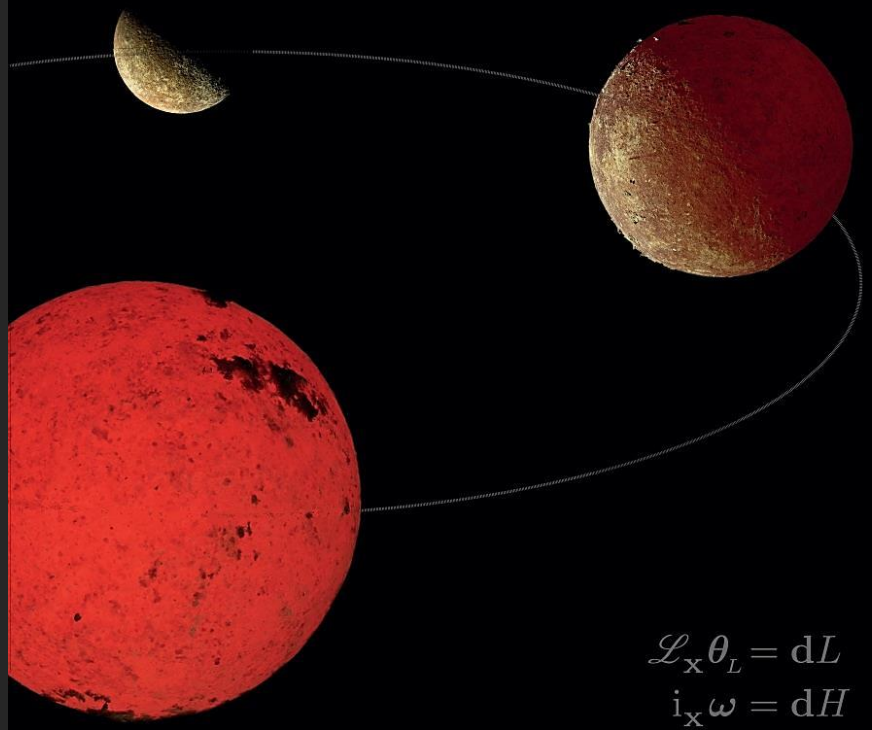
JIŘÍ PODOLSKÝ

KAROLINUM / MATFYZPRESS

TEORETICKÁ MECHANIKA VE TŘECH KNIHÁCH

JIŘÍ PODOLSKÝ

KAROLINUM / MATFYZPRESS



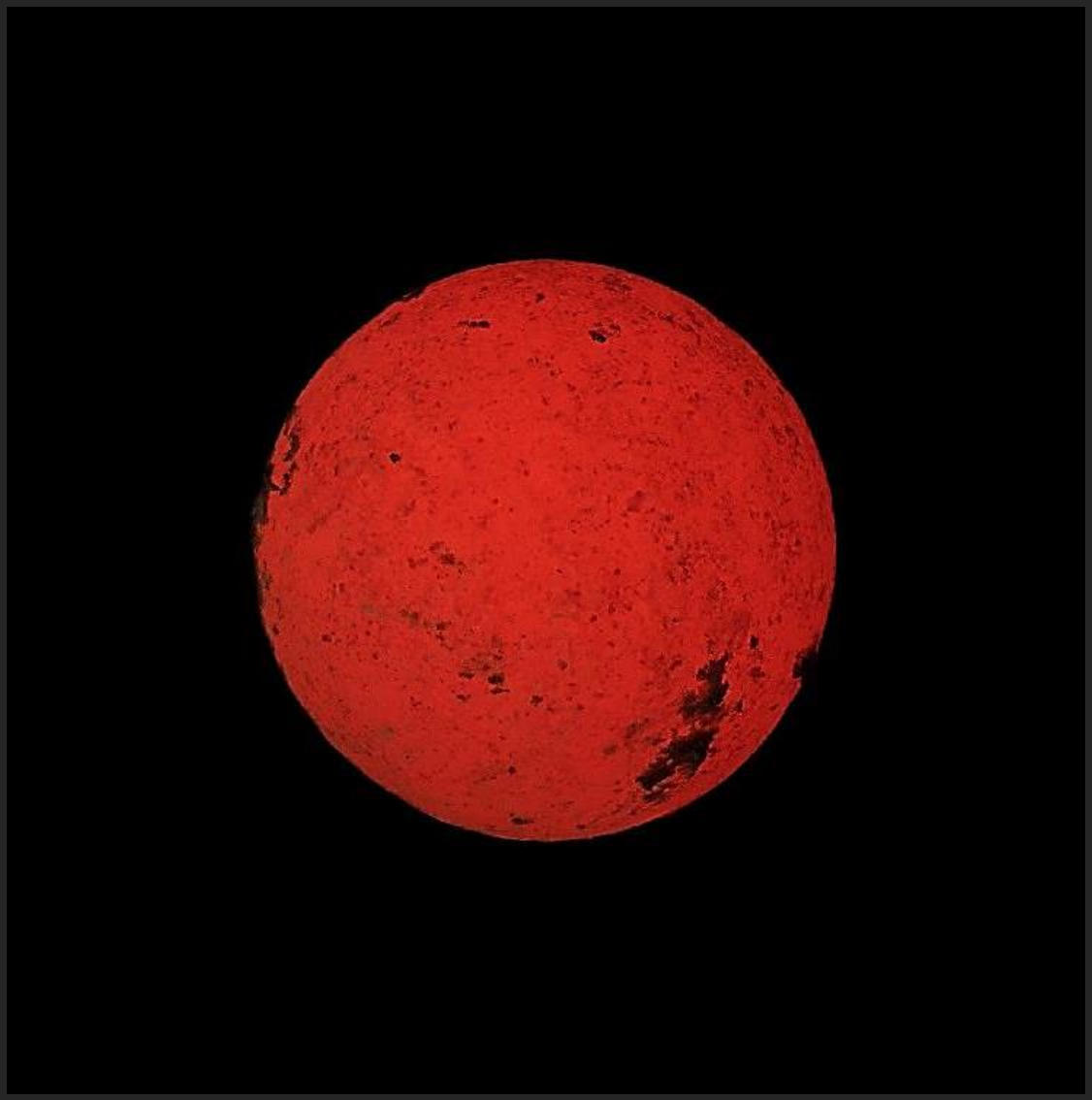
$$\mathscr{L}_{\mathrm{x}}\theta_L = \mathrm{d}L$$
$$\mathrm{i}_{\mathrm{x}}\omega = \mathrm{d}H$$

obálka konvolutu

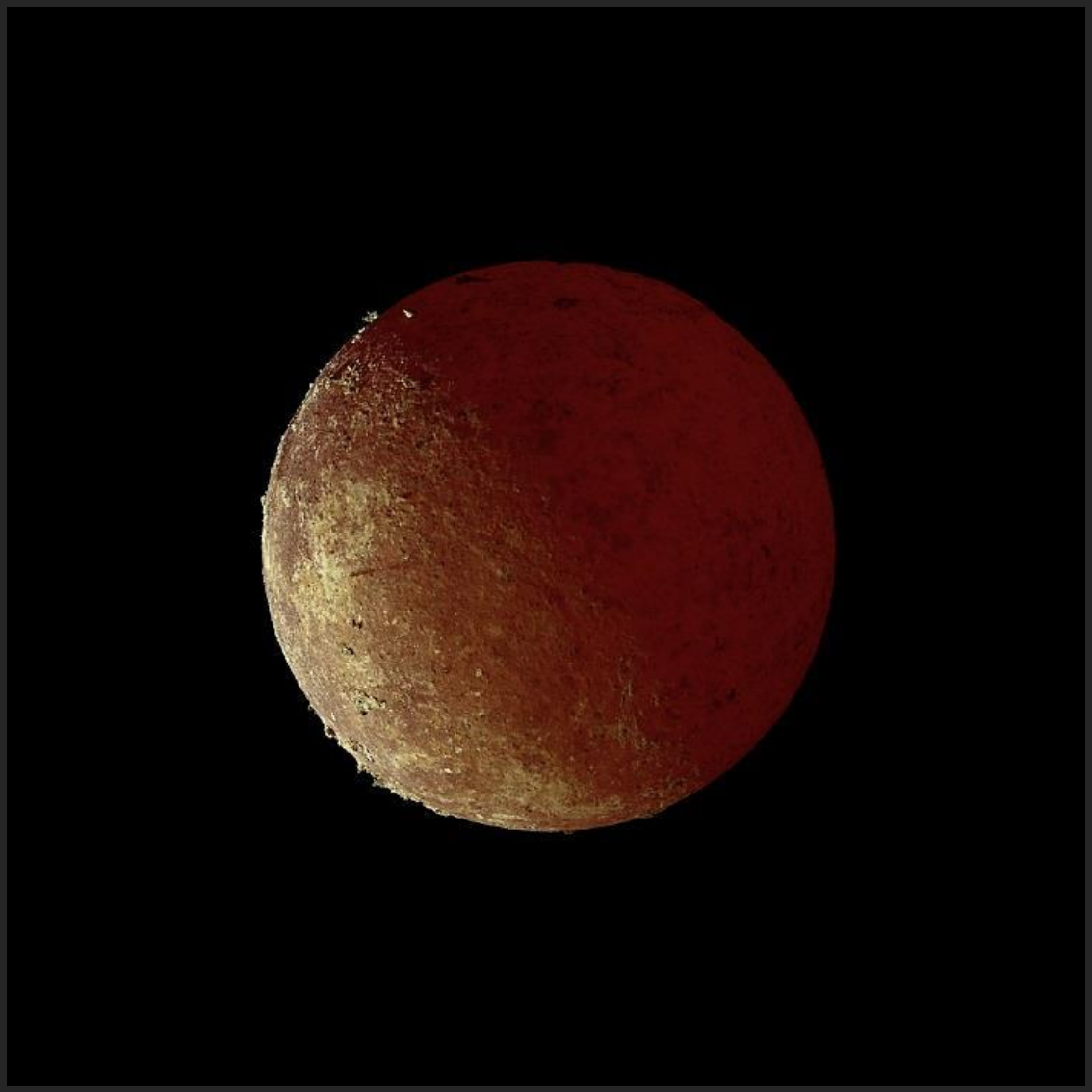
Jan Dotřel, kompozice jeho tří fotografií *Hadaikum Universum*
pořízených pro výstavu *Aetas Præhistorica*, Galerie Kvalitář, 2021

HADEAN nejstarší eon ve vývoji Země (4,6 - 4,0 mld let)

sférické modely hadeánského období rané Země a jejího postupného chladnutí
železná koule rozžhavená na 750 °C

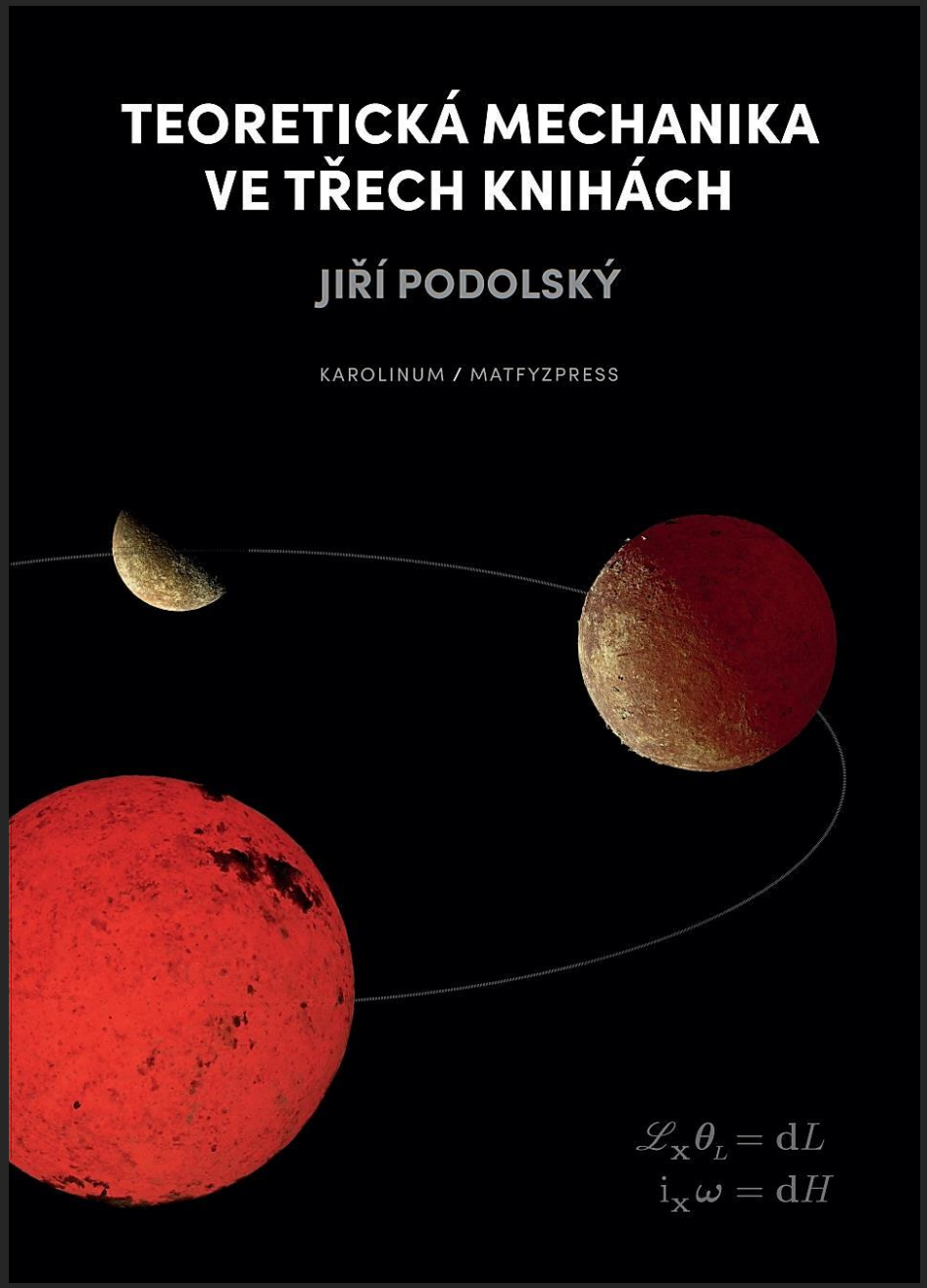


Jan Dotřel, *Hadaikum Universum*



Jan Dotřel, *Hadaikum Universum*

Jan Dotřel, *Hadaikum Universum*



jejich zmenšováním vznikla iluze prostorového pohybu

barvami je navíc naznačena termodynamická šipka času

MatfyzPress

Karolinum

Rozum je nepochybně slabý, když se poměřuje
svým nikdy nekončícím úkolem . . .
Přesto výtvory intelektu přežívají rušně se ženoucí generace
a století za stoletím šíří světlo a teplo.

Utěšeni touto myšlenkou vraťme se v těchto neklidných dnech
k památce Newtonově, který byl dán lidstvu před třemi sty lety.

Albert Einstein, vánoce 1942,
esej „Isaac Newton“ v *The Manchaster Guardian*,
česky v knize *Z mých pozdějších let*, 1995, str. 147

Vzdělání je to,
co zůstane,
když člověk zapomene všechno,
co se ve škole naučil.

Albert Einstein, 15. října 1936,
citováno v projevu na 72. konvokaci
Univerzity státu New York
česky v knize *Z mých pozdějších let*, 1995, str. 26

recenzenti

doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc. KDF MFF UK

prof. RNDr. Jan Novotný, CSc. KFChOV, PdF MU

Teď možná může recenze působit, že autora a jeho text vychvaluji až příliš – ale podle mého názoru je recenzovaná učebnice opravdu kvalitním dílem, které má šanci být základním českým učebnicovým textem o teoretické mechanice, z něhož budou studenti i vyučující čerpat následující roky a desetiletí.

Úkolem recenzenta je podle mého mínění i ve velmi kvalitním díle (a právě v něm) upozornit i na drobnosti, kde by text bylo možno ještě upravit (třeba pro ještě vyšší srozumitelnost některých detailů), a dát tyto dílčí náměty k dispozici autorovi, aby je zvážil a případně do finální podoby textu ještě lehce zasáhl. Takto jsem přistupoval i k textu prof. Podolského.

doc. Dvořák

na 432 stranách bylo těch „drobností“ (a někde to nebyly drobnosti) 694
všechny jsem je pečlivě zvážil a zapracoval

otevřených problémů, duchovního okouzlení. Kdo měl to štěstí, že vedl kurz teoretické mechaniky se zvídavými studenty a přistupoval ke svému úkolu odpovědně a kreativně, uvědomí si časem, jak mnoho tím získal pro pochopení fyziky a vědeckého myšlení vůbec. A mnohdy neodolá, aby se své zkušenosti nepokusil využít k užitku kolegů i studentů.

To je zřejmě případ profesora Jiřího Podolského. V úvodu k recenzované knize vzpomíná, jak ho roku 1995 přizval k účasti na výuce teoretické mechaniky skvělý učitel Jiří Langer. Připomíná pak několik knih, které sloužily jako základ pro výuku teoretické mechaniky na Karlově univerzitě. Jeho přehled začíná *Teoretickou mechanikou* A. Seydlera (1880) a pokračuje *Základy*

prof. Novotný

nahlédněme tedy už
do vydaného svazku
ale jen krátce…

Dílo je uceleným a navzájem propojeným souborem tří knih, jež jsou moderní učebnicí teoretické mechaniky určenou především pro studenty Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

První kniha obsahuje klasický výklad Lagrangeova a Hamiltonova formalismu pro hmotné body, tuhé těleso i kontinuum, druhá elegantní podobu těchto formalismů v jazyce diferenciální geometrie, jež je oproštěna od souřadnic. Ve třetí knize jsou vzorově vyřešeny pečlivě zvolené typové příklady k procvičení. Zmíněny jsou i návaznosti na kvantovou a relativistickou teorii.

Soubor má přehlednou strukturu, srozumitelnou formu výkladu a bohaté ilustrace.

prof. RNDr. JIŘÍ PODOLSKÝ, CSc., DSc. (* 1963)
Vystudoval Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy, kde od té doby působí, nyní jako profesor na Ústavu teoretické fyziky. Zabývá se obecnou teorií relativity, o gravitaci publikoval více než 100 článků a monografii *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity* (Cambridge, 2009).

Tři desetiletí vede kurz teoretické mechaniky a matematických metod, přednáší o prostoročasech, gravitačních vlnách a historii fyziky. Věnuje se popularizaci vědy, přeložil 20 knih. Působil jako poradce seriálu *Génius: Einstein* (National Geographic, 2017).

V roce 2022 mu byla udělena Nušlova cena za celoživotní přínos v oblasti teoretické fyziky, v roce 2023 získal Cenu Wernera von Siemense v kategorii Nejlepší pedagogický pracovník. Je po něm pojmenována planetka 36174.

www.karolinum.cz
ISBN 978-80-246-5746-2

Dílo je uceleným a navzájem propojeným souborem tří knih, jež jsou moderní učebnicí teoretické mechaniky určenou především pro studenty Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

První kniha obsahuje klasický výklad Lagrangeova a Hamiltonova formalismu pro hmotné body, tuhé těleso i kontinuum, druhá elegantní podobu těchto formalismů v jazyce diferenciální geometrie, jež je oproštěna od souřadnic. Ve třetí knize jsou vzorově vyřešeny pečlivě zvolené typové příklady k procvičení. Zmíněny jsou i návaznosti na kvantovou a relativistickou teorii.

Soubor má přehlednou strukturu, srozumitelnou formu výkladu a bohaté ilustrace.

www.karolinum.cz
ISBN 978-80-246-5746-2
9 788024 657462

struktura trilogie

KNIHA PRVNÍ
Teoretická mechanika
v klasické formulaci
180 stran

KNIHA DRUHÁ
Teoret.mechanika v jazyce
diferenciální geometrie
100 stran

KNIHA TŘETÍ
Teoretická mechanika
v příkladech
110 stran

část I. Mechanika hmotných bodů
část II. Mechanika tuhého tělesa
část III. Mechanika kontinua

Už první díl trilogie plně odpovídá záměru vytvořit moderní a efektivní učebnici, která umožňuje pochopit náročný předmět a může také sloužit jako vstupní brána do světa teoretické fyziky.

Navíc je tu však ještě třetí díl, který umožňuje nejen pochopit, ale i naučit se v oboru pracovat. Pod názvem **Teoretická mechanika v příkladech** podává autor monumentální soubor 60 detailně vyřešených příkladů z pěti oblastí mechaniky, kterými jsou *newtonovská fyzika*,

prof. Novotný

struktura a obsah trilogie

KNIHA PRVNÍ

Teoretická mechanika

v klasické formulaci

180 stran

část I. Mechanika hmotných bodů

1 Newtonovská mechanika
2 Newtonovy rovnice s vazbami
3 Lagrangeův formalismus
4 Hamiltonův variační princip
5 Hamiltonův formalismus

část II. Mechanika tuhého tělesa

6 Kinematika tuhého tělesa
7 Dynamika tuhého tělesa
8 Aplikace: setrvačníky

část III. Mechanika kontinua

9 Rovnice struny a její řešení
10 Mechanika kontinua

KNIHA TŘETÍ

Teoretická mechanika

v příkladech

110 stran

1 Newtonovská mechanika

2 Newtonovy rovnice s vazbami

3 Lagrangeův formalismus

4 Hamiltonův formalismus

5 Mechanika tuhého tělesa

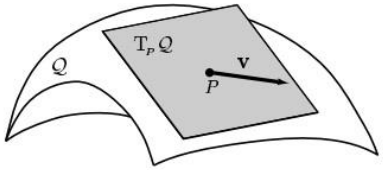
náhled do

KNIHY PRVNÍ

Teoretická mechanika

v klasické formulaci

spojením obou druhů informací o polohách i rychlostech vzniká prostor fyzikálních stavů daného systému: jde o takzvaný ***tečný bandl*** $\mathrm{T}\mathcal{Q}$, neboli ***rychlostní fázový prostor***, dimenze $2n$ parametrizovaný souřadnicemi $(q^1,\dots,q^n,\dot q^1,\dots,\dot q^n)$. Podrobnosti lze najít v *KNIZE DRUHÉ* tohoto konvolutu.



Uvedená struktura rychlostního fázového prostoru poskytuje například přirozené vysvětlení tzv. *Zénónova paradoxu šípu*.[2] Paradox podle Zénóna spočívá v tom, že nelze navzájem odlišit letící a stojící šíp, když se oba právě nacházejí na stejném místě. Opravdu: z hlediska konfiguračního prostoru $\mathcal{Q}$ mají oba stejné hodnoty zobecněných souřadnic q^j. Přesto ale představují odlišné fyzikální stavy určené jinými hodnotami zobecněných rychlostí $\dot q^j$: zatímco stojící šíp je určen nulovým vektorem $\mathbf{v}=0$ z $\mathrm{T}_P\mathcal{Q}$, šíp letící stejným bodem P danou rychlostí je určen konkrétním *nenulovým* vektorem $\mathbf{v}\in\mathrm{T}_P\mathcal{Q}$.

3.2 Odvození Lagrangeových rovnic II. druhu

Nyní již můžeme přistoupit k vlastnímu odvození pohybových rovnic soustavy, jejíž konfigurace jsou vyjádřeny vhodnými zobecněnými souřadnicemi. Takové rovnice se nazývají Lagrangeovy rovnice II. druhu. Z pedagogických důvodů je nejdřív odvodíme pro nejjednodušší jednorozměrnou situaci (takže nebudeme muset psát žádné indexy) a potom rovnice přímočaře zobecníme na libovolný počet zobecněných souřadnic.

3.2.1 Nejjednodušší situace

Uvažujme pro jednoduchost nejprve ***jednorozměrný pohyb jediné částice*** hmotnosti m podél kartézské osy x. Nechť zobecněná souřadnice je q, přičemž vztah mezi ní a kartézskou polohou x je obecně $x(q,t)$. Pro konkrétní trajektorii $q(t)$ odtud dostáváme

$$x(t)=x\big(q(t),t\big)\,,\qquad\text{takže}\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial x}{\partial t}\,. \tag{3.4}$$

Nyní můžeme snadno spočítat ***kinetickou energii*** částice, kterou budeme označovat symbolem T:

$$T(t)=\tfrac12 m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=\tfrac12 m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2. \tag{3.5}$$

[2] Zénón z Eleje (490–430 př. n. l.), proslulý řecký filozof a žák Parmenidův, se proslavil zejména svými aporiemi: „letící šíp je v klidu“, „Achilleus nikdy nedohoní želvu“ a podobně.

Všechny tyto funkce závisejí na čase, neboť je vyčíslujeme podél trajektorie $q(t)$. Protože však výraz (3.5) platí *pro každou trajektorii* a *v každém fixním okamžiku* t_0, musí v t_0 platit vztah

$$T(q,\dot q,t_0)=\tfrac12 m\left(\frac{\partial x}{\partial q}(q,t_0)\,\dot q+\frac{\partial x}{\partial t}(q,t_0)\right)^2, \tag{3.6}$$

kde

$$q=q(t_0)\text{ je okamžitá poloha}\quad\text{a}\quad \dot q=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t_0)\text{ je okamžitá rychlost.}$$

Jestliže nyní budeme v zafixovaném čase t_0 zobecněnou souřadnici q a zobecněnou rychlost $\dot q$ chápat jako *navzájem nezávislé parametry*, dostaneme parciálním derivováním (3.6) rovnice

$$\frac{\partial T}{\partial\dot q}=m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\,\dot q+\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial q}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q}=m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\,\dot q+\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)\dot q+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)\right]. \tag{3.8}$$

Tyto vztahy opět musí platit v *každém okamžiku* t_0 *libovolné trajektorie* $q(t)$. Proto můžeme získat *časové vyjádření vývoje* obou veličin (3.7), (3.8) prostým dosazením

$$q=q(t)\quad\text{a}\quad\dot q=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t),$$

tedy

$$\frac{\partial T}{\partial\dot q}(t)=m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial q}=m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x}{\partial q}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q}(t)=m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)\right]=m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right), \tag{3.10}$$

kde v druhých rovnostech jsme uplatnili vztah (3.4) a jeho analogii pro $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)$. Odečteme-li nyní od úplné časové derivace prvního výrazu druhý výraz, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial x}{\partial q}+m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)-m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial x}{\partial q}, \tag{3.11}$$

protože druhý a třetí výraz se navzájem odečtou. Pravou stranu (3.11) lze pomocí Newtonovy pohybové rovnice již snadno vyjádřit

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial x}{\partial q}=F\frac{\partial x}{\partial q}\equiv Q, \tag{3.12}$$

kde Q je ***zobecněná síla***, což je průmět obvyklé „kartézské“ síly F do směru tečného vektoru (ne nutně jednotkového) k zobecněné souřadnici q. Tím jsme odvodili

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q}\,, \tag{3.13}$$

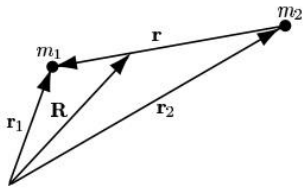
což je slavný ***Rutherfordův vztah*** pro pružný rozptyl v coulombickém poli. Nejprve ho odvodil teoreticky a pak ho v roce 1911 se svými spolupracovníky experimentálně ověřil rozptylem α-částice na atomech zlata. Experiment jasně prokázal, že dochází ke coulombickému rozptylu na *bodovém* kladně nabitém centru (nikoli například na rozptýleném nábojovém oblaku), čímž byl učiněn *objev atomového jádra* o velikosti řádově 10^{-15} m.

3.5 Problém dvou těles

Uvažujme nyní dva spolu gravitačně interagující objekty (například dvojhvězdný systém) o hmotnostech m_1 a m_2. Oproti Keplerově úloze tedy již nepředpokládáme, že centrum je pevné. Máme proto celkem 6 stupňů volnosti. Ukážeme ale, že po vhodném rozseparování na 3+3 stupně volnosti lze tuto úlohu převést na problém pohybu v poli centrální síly, který jsme již vyřešili v části 3.4.

Trik spočívá v přechodu ke vhodným zobecněným souřadnicím: namísto polohových vektorů $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ obou objektů zavedeme *polohu hmotného středu* $\mathbf{R}$ a *relativní polohu* $\mathbf{r}$, a to vztahy

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\,\mathbf{r}_1 + m_2\,\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}\,, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\,, \tag{3.64}$$



tedy inverzně

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{r}\,, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\mathbf{r}\,. \tag{3.65}$$

Lagrangeova funkce pak má tvar

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \\ &= \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\,\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|}\,. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Tři souřadnice (složky vektoru) $\mathbf{R}$ jsou cyklické, takže $(m_1+m_2)\,\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{konst}$. Platí tedy zákon zachování celkové hybnosti soustavy. Pohyb hmotného středu (těžiště) je proto rovnoměrný přímočarý (bez zrychlení) a bez újmy na obecnosti ***lze přejít do těžišťové soustavy***, kde $\mathbf{R}=0$, neboli dle (3.65) platí vztahy $\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\mathbf{r}$. V této soustavě pak má Lagrangeova funkce (3.66) tvar

$$L = \tfrac{1}{2}\mu\,\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Gm_1m_2}{r}\,, \tag{3.67}$$

kde jsme zavedli veličinu

$$\boxed{\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}} \tag{3.68}$$

zvanou ***redukovaná hmotnost***. Porovnáme-li nyní tvar Lagrangeovy funkce (3.67) s (3.34), vidíme, že problém dvou těles byl efektivně převeden na předchozí problém pohybu jediné (fiktivní) částice hmotnosti μ v centrálním gravitačním poli pevného centra. Z předchozích výpočtů víme, že výsledný pohyb musí být nutně rovinný. Je tedy výhodné zavést polární souřadnice, ve kterých

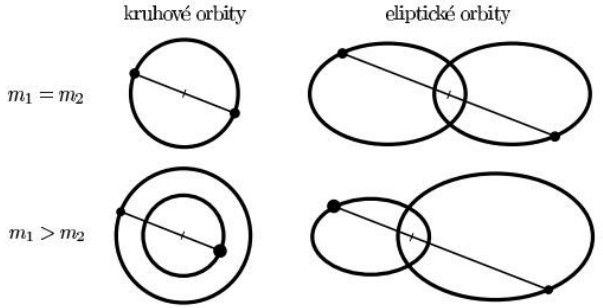
$$\boxed{L = \tfrac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{G(m_1+m_2)\mu}{r}}\,, \tag{3.69}$$

kde jsme využili ekvivalence Gm_1m_2 a $G(m_1+m_2)\mu$. Pro případ $m_2 \ll m_1$ je zjevně $\mu \approx m_2$ a $\mathbf{r}_1 \approx 0$, $\mathbf{r}_2 \approx -\mathbf{r}$, limitně tedy dostáváme Keplerovu úlohu již vyřešenou v části 3.4. V obecném případě srovnatelných hmotností obou hvězd postupujeme při řešení naprosto stejně jako v části 3.4.1, provedeme pouze formální substituci $M \to (m_1+m_2)$ a $m \to \mu$. Například 3. Keplerův zákon (3.57) bude mít pro dvojhvězdy tvar

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\,. \tag{3.70}$$

Tento výraz se v astronomii používá k určování hmotností dvojhvězd.

Víme, že orbity vázaného systému mohou být jen kruhové anebo eliptické. V prvním případě jsou obě hvězdy stále stejně daleko od sebe, ve druhém se navzájem přibližují a zase vzdalují dle „eliptického pravidla“. Výslednou dráhu obou těles ovšem musíme vykreslit tak, aby jejich těžiště zůstávalo stále na stejném místě. Pokud mají obě hvězdy naprosto stejnou hmotnost, budou obíhat po stejně velkých kružnicích resp. elipsách. Pokud je však $m_1 > m_2$, bude první hvězda obíhat po menší dráze než druhá hvězda, jak je naznačeno na následujícím obrázku:



Přechod do těžišťové soustavy dvou těles se používá i pro systémy, jež nemají vázané orbity, například pro rozptyl nabitých částic. To vede na zobecnění Rutherfordova vztahu (3.63), kde m je nahrazeno redukovanou hmotností μ.

evoluční rovnice klíčových fyzikálních polí

Bez bližšího vysvětlení uveďme hustoty Lagrangeovy funkce $\mathcal{L}$ významných teorií a z nich plynoucí polní rovnice, které mají obecný tvar (4.14), což je nutná podmínka stacionarity příslušné akce (4.13):

- **Maxwell** $\quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\nu A_\nu \qquad F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 j^\mu$
- **Einstein** $\quad \mathcal{L} = \frac{c^4}{16\pi G}(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_{\text{hmota}} \qquad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$
- **Klein–Gordon** $\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\Phi^{,\mu}\, \Phi_{,\mu} - \kappa^2\, \Phi^2\right) \qquad \left(\Box + \kappa^2\right) \Phi = 0$
- **Dirac** $\quad \mathcal{L} = \bar{\psi}\left(\mathrm{i}\,\gamma^\mu\, \partial_\mu - \kappa\right) \psi \qquad \left(\mathrm{i}\,\gamma^\mu\, \partial_\mu - \kappa\right) \psi = 0$

Zavedení použitých veličin je předmětem pokročilých kurzů relativistické a kvantové fyziky.[5]

4.3 Teorém Emmy Noetherové

V kontextu Lagrangeova formalismu a Hamiltonova variačního principu je možné odvodit hlubokou souvislost mezi matematickými symetriemi akce a fyzikálními zákony zachování:

> Má-li systém (tedy jeho akce) nějakou spojitou symetrii, pak existuje jí odpovídající fyzikální veličina, která se zachovává.

Tuto klíčovou větu teoretické fyziky explicitně zformulovala a dokázala vynikající matematička Amalie Emmy Noetherová (1882–1935) v roce 1915 a publikovala ho v roce 1918 [20]. Na její počest se nazývá ***teorém Emmy Noetherové.***

Explicitně ho lze vyjádřit a dokázat následujícím způsobem:

Nejprve je nutné zavést koncept *symetrie systému vůči spojitým transformacím.* Mějme velmi obecnou třídu (diferencovatelných) transformací času a zobecněných souřadnic

$$\begin{aligned} t &\mapsto t'(t, q^j, \varepsilon), \\ q^j &\mapsto q'^j(t, q^j, \varepsilon), \end{aligned} \tag{4.16}$$

[5] V relativistickém zápisu Maxwellových a Einsteinových rovnic se pro signaturu metriky užívá konvence $(-+++)$. V kvantové teorii pole se pro Kleinovu–Gordonovu a Diracovu rovnici užívá opačná signatura $(+---)$. Relativistický vlnový operátor $\partial^\mu \partial_\mu \equiv \Box \equiv \Delta - (1/c^2)\,\partial_t^2$ má pak opačné znaménko, neboli $\Box \equiv (1/c^2)\,\partial_t^2 - \Delta$. Konstanta $\kappa = mc/\hbar$ je úměrná hmotnosti m částice.

Poznamenejme ještě, že třídy konečných transformací (translací, rotací) *tvoří grupu.* Jeden její konkrétní prvek je transformace s danou hodnotou ε. Jednotkový prvek grupy je identická transformace (s hodnotou $\varepsilon = 0$), inverzní prvek je inverzní transformace ($\varepsilon \to -\varepsilon$) a binární grupovou operací je pochopitelně skládání dvou transformací ($\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$). Tyto jednoparametrické grupy transformací nejsou konečné, obsahují *spojitě nekonečně prvků*, které jsou indexovány parametrem $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Jsou to takzvané ***Lieovy grupy***: grupy které jsou současně hladkými *varietami* (viz část 1.1.1 *KNIHY DRUHÉ*). Lieovy grupy hrají významnou roli v moderní teoretické fyzice, podrobnosti o těchto matematických strukturách lze najít v učebnicích [21, 22].

Nyní lze exaktně zformulovat, co myslíme pojmem ***spojitá symetrie fyzikálního systému***.

Mějme mechanický systém popsaný Lagrangeovou funkcí L. Příslušný funkcionál akce (4.9) je

$$S[q^j(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\left(q^j(t), \dot{q}^j(t), t\right) \mathrm{d}t\,. \tag{4.22}$$

Proveďme nyní transformaci času a souřadnic tvaru (4.16). V nových proměnný obecně dostaneme *jinou* Lagrangeovu funkci L' a akci

$$S'[q'^j(t')] \equiv \int_{t_1'}^{t_2'} L'\left(q'^j(t'), \dot{q}'^j(t'), t'\right) \mathrm{d}t'\,. \tag{4.23}$$

Systém má symetrii, když je hodnota akčního funkcionálu při dané transformaci invariantní, tedy

$$\boxed{S'[q'^j(t')] = S[q^j(t)]}\,. \tag{4.24}$$

Navíc musí mít Lagrangeova funkce v nových proměnných zcela stejný tvar jako v původních, tedy ***co do funkcionální formy platí*** $L' = L$, neboli

$$\boxed{L'\left(q'^j(t'), \dot{q}'^j(t'), t'\right) = L\left(q'^j(t'), \dot{q}'^j(t'), t'\right)}\,. \tag{4.25}$$

Teorém Emmy Noetherové:

Jsou-li splněny předpoklady (4.24) a (4.25) symetrie systému, pak se zachovává fyzikální veličina

$$\boxed{\mathcal{Z} \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\left(\mathrm{Q}^j - \dot{q}^j\, \mathrm{T}\right) + L\,\mathrm{T}}\,, \tag{4.26}$$

kde $\mathrm{T}(t, q^j)$ a $\mathrm{Q}^j(t, q^j)$ jsou generátory transformace symetrie. Veličina $\mathcal{Z}$ je tedy integrál pohybu, neboli $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{Z}(t) = 0$.

Kapitola 5

Hamiltonův formalismus

Lagrangeův formalismus, kterým jsme se dosud zabývali, tvoří první pilíř klasické analytické mechaniky. Druhým jejím pilířem je Hamiltonův kanonický formalismus. Proto v této kapitole přejdeme od Lagrangeova popisu mechanických systémů k duálnímu popisu Hamiltonovu. Vysvětlíme jeho koncepční rámec, zavedeme hlavní pojmy (kanonicky sdružené proměnné, fázový prostor, hamiltonián) a odvodíme Hamiltonovy kanonické pohybové rovnice.

Potom se budeme věnovat dalším důležitým strukturám, které se v kontextu Hamiltonova formalismu přirozeně objevují, zejména algebře Poissonových závorek, jejich vztahu k integrálům pohybu, kanonickým transformacím a z nich plynoucí Hamiltonově–Jacobiho teorii, jež představuje další pozoruhodnou reformulaci zákonů klasické mechaniky. Neopomeneme přitom zmínit důležitou roli, kterou tyto nové pojmy hrají v kvantové teorii a ve statistické fyzice.

5.1 Základní pojmy Hamiltonova formalismu

Nejprve vybudujeme koncepční aparát nového formalismu. Začneme definicemi tří klíčových pojmů:

5.1.1 Kanonická hybnost

V Hamiltonově formalismu se i nadále používají zobecněné souřadnice q^j, viz (3.1), ale namísto zobecněných rychlostí $\dot{q}^j$ se zavádějí ***nové nezávislé proměnné*** zvané ***kanonické hybnosti*** p_j. Pro systém s Lagrangeovou funkcí $L(q^j, \dot{q}^j, t)$ jsou kanonické hybnosti p_j definovány předpisem

$$\boxed{p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}}. \tag{5.1}$$

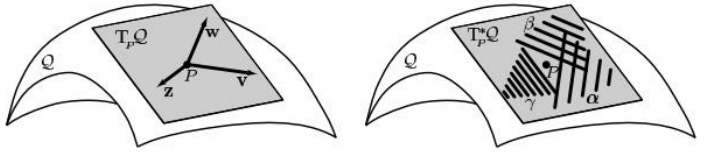
Jak uvidíme z příkladů v části 5.4, kanonická hybnost může mít význam obvyklé hybnosti částice, ale také nemusí.

5.3 Shrnutí a hlubší geometrický náhled

Na první pohled vidíme, že nově zavedený ***Hamiltonův kanonický formalismus*** se od Lagrangeova liší tím, že pro popis systému *používá dvojnásobný počet proměnných*: sdružené páry zobecněných souřadnic q^j a kanonických hybností p_j. Jejich hodnoty jednoznačně určují bod ve *fázovém prostoru*, jenž reprezentuje fyzikální stav mechanického systému. Časový vývoj tohoto systému (jeho pohyb) je určen trajektorií $\big(q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)\big)$ ve fázovém prostoru, kterou pro konkrétní *Hamiltonovu funkci* H získáme řešením Hamiltonových kanonických rovnic (5.8). Z matematického hlediska je to soustava $2n$ ***obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu***.

Naproti tomu v původním ***Lagrangeově formalismu*** jsou výchozí *jen zobecněné souřadnice* q^j, jichž je n, tedy tolik co stupňů volnosti. Jsou to souřadnice *konfiguračního prostoru* $\mathcal{Q}$ *všech poloh* (který sám o sobě není prostorem fyzikálních stavů systému). Dynamika je určena *Lagrangeovou funkcí* L, a to Lagrangeovými rovnicemi (3.24). Z matematického hlediska představují Lagrangeovy pohybové rovnice II. druhu soustavu n ***obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu*** pro hledané funkce $\big(q^1(t), \dots, q^n(t)\big)$, jež popisují trajektorii pohybu dané soustavy.

Při hlubším pohledu ale vidíme, že rozdíl mezi Hamiltonovým a Lagrangeovým popisem je subtilnější. Připomeňme, že i Lagrangeův popis obsahuje n dodatečných proměnných, konkrétně zobecněné rychlosti $\dot{q}^j$. Spolu se souřadnicemi q^j tedy také má $2n$ parametrů, které jednoznačně určují fyzikální stav daného systému. Hovoříme o *rychlostním fázovém prostoru* $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ neboli *tečném bandlu* konfiguračního prostoru $\mathcal{Q}$, přičemž $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ má souřadnice $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$, a tedy dimenzi $2n$. Právě pomocí zobecněných rychlostí dokážeme například rozlišit letící a stojící šíp (viz Zénónův paradox z části 3.1.2): z hlediska konfiguračního prostoru $\mathcal{Q}$ mají stejné hodnoty souřadnic q^j, ale reprezentují odlišné fyzikální stavy určené různými hodnotami $\dot{q}^j$. Zatímco šíp *stojící* v bodě $P \in \mathcal{Q}$ je určen *nulovým* vektorem $\mathbf{v} \equiv (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = 0$ z $\mathrm{T}_P\mathcal{Q}$, šíp *letící* stejným bodem P prostoru je určen konkrétním *nenulovým* vektorem $\mathbf{v} \in \mathrm{T}_P\mathcal{Q}$.



Podobně je tomu i v Hamiltonově formalismu. Rozdíl je v tom, že oproti složkám *vektoru rychlosti* $\mathbf{v} \equiv (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ z $\mathrm{T}_P\mathcal{Q}$ se ve fázovém prostoru hamiltonovské mechaniky používají složky *1-formy kanonické hybnosti* $\boldsymbol{\alpha} \equiv (p_1, \dots, p_n)$ z *duálního kotečného prostoru* $\mathrm{T}^*_P\mathcal{Q}$ v bodě $P \in \mathcal{Q}$ konfiguračního prostoru $\mathcal{Q}$, takže varieta $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ má souřadnice $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Složky kanonické hybnosti $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{T}^*_P\mathcal{Q}$ se netransformují jako vektory, ale duálně jako 1-formy. Proto také mají dolní indexy, nikoli horní.

6.3 Zavedení úhlové rychlosti

Uvažujme nyní libovolný časově závislý vektor $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$. Tento vektor lze vyjádřit v obou již zmíněných přirozených ortonormálních bázích:

$\{\mathbf{e}_i\}$ ... ***báze pevná v prostoru***

$\{\mathbf{e}'_i(t)\}$ ... ***báze spojená s tělesem*** (korotující)

Je tedy $\mathbf{w}(t) = w_i(t)\,\mathbf{e}_i = w'_i(t)\,\mathbf{e}'_i(t)$, přičemž obě ortonormální báze jsou navzájem jen pootočené, takže platí $\mathbf{e}'_i(t) = A_{ik}(t)\,\mathbf{e}_k$, resp. $\mathbf{e}_k = A_{jk}(t)\,\mathbf{e}'_j(t)$. Zde A_{ij} jsou prvky ortogonální matice A, takže $A^{\mathrm{t}} = A^{-1}$, což ve složkách dává relace ortogonality $A_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}$. Časová derivace vektoru $\mathbf{w}(t)$ *vzhledem k inerciálnímu systému* – vyjádřená však v korotující bázi $\mathbf{e}'_i(t)$ – je potom vektor

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w'_i}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_i + w'_i\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w'_i}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_i + w'_i\,\frac{\mathrm{d}A_{ik}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}_k = \frac{\mathrm{d}w'_i}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_i + w'_i\,\frac{\mathrm{d}A_{ik}}{\mathrm{d}t}A_{jk}\,\mathbf{e}'_j\,. \quad (6.1)$$

Je proto přirozené a výhodné definovat matici

$$\boxed{\Omega' = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}A^{\mathrm{t}}} \quad \text{s prvky} \quad \boxed{\Omega'_{ij} \equiv \frac{\mathrm{d}A_{ik}}{\mathrm{d}t}A_{jk}}, \quad (6.2)$$

takže

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w'_i}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{e}'_i + w'_i\,\Omega'_{ij}\,\mathbf{e}'_j\,. \quad (6.3)$$

Protože na levé straně tohoto vztahu je vektor, musí být i napravo, což se týká prvního i druhého členu. Prvky Ω'_{ij} matice Ω' tedy reprezentují *tenzor 2. řádu*, zvaný ***tenzor úhlové rychlosti*** Ω. Konkrétně platí, že (6.2) jsou ***složky tohoto tenzoru vůči korotující bázi*** $\{\mathbf{e}'_i(t)\}$, neboli

$$\boxed{\Omega'_{ij} \equiv \Omega(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j)}. \quad (6.4)$$

Derivováním relací ortogonality $A_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}$ dostáváme $\frac{\mathrm{d}A_{ik}}{\mathrm{d}t}A_{jk} = -\frac{\mathrm{d}A_{jk}}{\mathrm{d}t}A_{ik}$, takže musí platit

$$\boxed{\Omega'_{ij} = -\Omega'_{ji}}. \quad (6.5)$$

Matice Ω' je tudíž ***antisymetrická***, má *jen tři nezávislé složky*, a proto k ní lze standardním způsobem přiřadit duálně sdružený (pseudo)vektor $\boldsymbol{\Omega}$ zvaný ***vektor úhlové rychlosti*** předpisem

$$\boxed{\Omega'_k \equiv \tfrac{1}{2}\varepsilon_{kij}\Omega'_{ij}}. \quad (6.6)$$

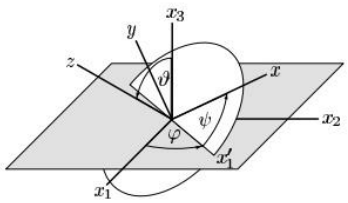
To znamená, že *složky* $\boldsymbol{\Omega}$ *v korotující bázi* jsou $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3) \equiv (\Omega'_{23}, \Omega'_{31}, \Omega'_{12})$. Opačný vztah je

$$\boxed{\Omega'_{ij} = \varepsilon_{ijk}\Omega'_k}. \quad (6.7)$$

6.4 Eulerovy úhly a Eulerovy kinematické rovnice

Ortogonální matice A jednoznačně určující vztah mezi dvěma libovolně natočenými bázemi je určena pouhými 3 nezávislými parametry (matice 3×3 obsahuje obecně 9 prvků, relace ortogonality však představují 6 vazeb). Libovolnou rotaci kolem počátku můžeme přitom realizovat třemi po sobě jdoucími jednoduchými rotacemi kolem vhodné pevné osy. Za úhlové parametry zmíněných tří jednoduchých rotací zvolil Euler (1738)

φ ... ***precesní úhel***
ϑ ... ***nutační úhel***
ψ ... ***rotační úhel***



Jejich význam plyne z následující konstrukce matice A:

1. Vyjdeme z báze $\mathbf{e}_i$ pevné v prostoru a otočíme ***kolem osy*** x_3 ***o úhel*** φ. Toto otočení je dáno maticí (6.11), tedy

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

2. Následně provedeme otočení ***kolem osy*** x_1' ***o úhel*** ϑ dané maticí

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

3. Nakonec provedeme otočení ***kolem osy*** x_3'' ***o úhel*** ψ dané maticí

$$B = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

Výsledná matice A transformace od báze pevné v prostoru do báze korotující s tělesem je pak samozřejmě dána maticovým součinem $\boxed{A = BCD}$. Její tvar explicitně neuvádíme, neboť naším hlavním záměrem zde je vyjádřit ***celkový vektor úhlové rychlosti*** $\boldsymbol{\Omega}$ odpovídající transformaci A. Protože jsme dokázali vztah (6.13) pro skládání vektorů úhlových rychlosti, je výsledný vektor $\boldsymbol{\Omega}$ dán součtem dílčích vektorů úhlových rychlostí odpovídajících transformacím D, C a B, přičemž z (6.11) je zřejmé, že $\boldsymbol{\Omega}^D = (0, 0, \dot{\varphi})$, $\boldsymbol{\Omega}^C = (\dot{\vartheta}, 0, 0)$, $\boldsymbol{\Omega}^B = (0, 0, \dot{\psi})$.

Kapitola 7

Dynamika tuhého tělesa

Již tedy víme, jak výhodně popisovat kinematiku tuhého tělesa například pomocí Eulerových úhlů. Abychom mohli zformulovat dynamický zákon pro otáčející se těleso (pohybovou rovnici), je nutno zavést veličinu vystihující příslušné setrvačné vlastnosti tuhého tělesa. Podobně jako hmotnost m tělesa je „mírou odporu tělesa vůči translačnímu urychlení“, je moment setrvačnosti I „mírou odporu tuhého tělesa vůči roztáčení“ kolem dané osy.

Ukazuje se ale, že setrvačné vlastnosti tělesa při *obecném* roztáčení mají poněkud složitější strukturu, kterou nyní zcela popíšeme pomocí tzv. tenzoru setrvačnosti. Jak uvidíme, půjde o tenzor 2. řádu, který bude možné definovat „matematickým způsobem“, elegantně a invariantně (nezávisle na souřadnicích) jako bilineární zobrazení přiřazující dvojici vektorů jisté reálné číslo.

7.1 Tenzor setrvačnosti

Vyjdeme z ***celkového momentu hybnosti*** $\mathbf{L}$ tuhého tělesa[1]

$$\mathbf{L} = \sum_a \mathbf{r}^a \times \mathbf{p}^a = \sum_a m^a\, \mathbf{r}^a \times \mathbf{v}^a = \sum_a m^a\, \mathbf{r}^a \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a)\,, \tag{7.1}$$

kde sumace probíhá přes všech N bodů tělesa, $a = 1, 2, \ldots, N$, majících hmotnosti m^a v místech $\mathbf{r}^a$. Ve vzorci jsme použili vztah $\mathbf{v}^a = (\mathrm{d}\mathbf{r}^a/\mathrm{d}t)|_{\text{prostor}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a$, který plyne z (6.8), neboť rychlost bodů vůči tělesu je nulová. Směr vektoru $\mathbf{L}$ je možné charakterizovat vůči jiným vektorům. Vezměme proto *libovolný vektor* $\boldsymbol{\xi}$ a promítněme $\mathbf{L}$ na $\boldsymbol{\xi}$,

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum_a m^a\, \mathbf{r}^a \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum_a m^a\, (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a)\,, \tag{7.2}$$

[1] Translaci tuhého tělesa zde neuvažujeme, tedy $\mathbf{r}^a$ je poloha vůči těžišti (či jinému referenčnímu bodu tělesa), které je na *pevném* místě $\mathbf{R}$. Obecně je poloha bodu m^a dána $\mathbf{R} + \mathbf{r}^a$, ale protože $\mathbf{R}$ je konstantní (nejlépe nulové), nevstupuje do výrazů pro celkový moment hybnosti $\mathbf{L}$ ani kinetickou energii T.

kde v posledním vztahu jsme využili pravidlo o cyklické záměně ve smíšeném součinu vektorů $\mathbf{r}^a$, $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a)$ a $\boldsymbol{\xi}$. Je tedy zcela přirozené pro dané těleso zavést funkci

$$\boxed{I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \sum_a m^a\, (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a)}\,. \tag{7.3}$$

Funkce $I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega})$ definovaná tímto vztahem přiřazuje dvojici vektorů $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega})$ reálné číslo rovné $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi}$,

$$\boxed{\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi} = I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega})}\,. \tag{7.4}$$

Funkce $I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega})$ je lineární v obou argumentech a je *symetrická*. Je to tedy podle „algebraické“ definice tenzor, navíc ***symetrický***, a nazývá se ***tenzor setrvačnosti.***

Dosadíme-li do (7.3) i za vektor $\boldsymbol{\xi}$ také vektor $\boldsymbol{\Omega}$, dostaneme

$$I(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_a m^a\, (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) = \sum_a m^a\, \mathbf{v}^a \cdot \mathbf{v}^a = 2\,T\,, \tag{7.5}$$

kde T je ***kinetická energie*** otáčejícího se tělesa, tedy

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}\, I(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega})}\,. \tag{7.6}$$

V části 6.1 jsme připomněli souvislost mezi abstraktní „algebraickou“ a klasickou „složkovou“ definicí tenzoru. Složky tenzoru získáme, když za jeho argumenty dosadíme všechny kombinace bázových vektorů. ***Složky I_{ij} tenzoru setrvačnosti*** I jsou tedy obrazy vektorů báze $\mathbf{e}_i$ a $\mathbf{e}_j$,

$$\boxed{I_{ij} \equiv I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_a m^a\, (\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}^a) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}^a)}\,. \tag{7.7}$$

Tento vztah můžeme dále upravit. Polohové vektory $\mathbf{r}^a$ jednotlivých bodů tělesa lze také vyjádřit v bázi $\{\mathbf{e}_i\}$, neboli $\mathbf{r}^a = x^a_k\, \mathbf{e}_k$, takže

$$I_{ij} = \sum_a m^a\, (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_l)\, x^a_k\, x^a_l = \sum_a m^a\, (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k)_n\, (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_l)_n\, x^a_k\, x^a_l$$

$$= \sum_a m^a\, \varepsilon_{nik}\, \varepsilon_{njl}\, x^a_k\, x^a_l = \sum_a m^a\, (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj})\, x^a_k\, x^a_l = \sum_a m^a\, (\delta_{ij}\, x^a_k\, x^a_k - x^a_i\, x^a_j)\,,$$

resp. pro spojité prostředí

$$\boxed{I_{ij} = \int (\delta_{ij}\, x_k\, x_k - x_i\, x_j)\, \rho\, \mathrm{d}V}\,, \tag{7.8}$$

což je obvyklý tvar složek tenzoru setrvačnosti uváděný v učebnicích.

Nyní klíčové vztahy (7.4), (7.6) užitím bilinearity tenzorového zobrazení I vyjádříme složkově:

$$L_i\, \xi_i = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi} = I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}) = I(\xi_i\, \mathbf{e}_i, \Omega_j\, \mathbf{e}_j) = \xi_i\, \Omega_j\, I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \xi_i\, \Omega_j\, I_{ij}\,,$$
$$T = \tfrac{1}{2}\, I(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) = I(\Omega_i\, \mathbf{e}_i, \Omega_j\, \mathbf{e}_j) = \Omega_i\, \Omega_j\, I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \tfrac{1}{2}\, \Omega_i \Omega_j\, I_{ij}\,.$$

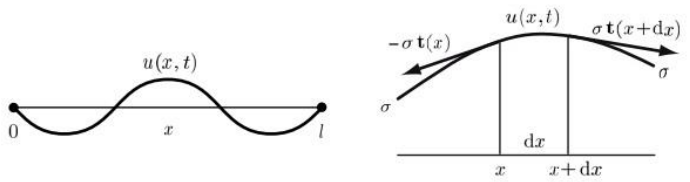
Kapitola 9

Rovnice struny a její řešení

V této kapitole prostudujeme příčný pohyb struny, tedy jednorozměrného spojitého útvaru, na který působí vnitřní síly napětí. Nejprve odvodíme parciální diferenciální pohybovou rovnici struny a potom uvedeme dvě obecné metody jejího řešení, d'Alembertovu a Bernoulliovu–Fourierovu. Rozbor struny představuje významný přechod od mechaniky diskrétních hmotných bodů k mechanice spojitého kontinua, které se budeme věnovat v následující kapitole 10.

9.1 Odvození rovnice pro příčné kmity struny

Uvažujme strunu, jejíž konce jsou upevněny v bodech 0 a l na ose x. Předpokládejme, že hmotnost je podél x rozložena s konstantní ***lineární hustotou*** ρ a že struna je napjatá vnitřní ***silou*** σ.[1]



Nechť struna koná jen *příčné kmity*. Její výchylku z rovnovážné polohy popíšeme funkcí $u(x,t)$. Souřadnice x představuje vlastně spojitý index, který označuje jednotlivé body struny. Předpokládejme dále, že výchylky jsou malé ve smyslu, který vyplyne z přiblížení, jež v dalším použijeme. Při kmitech se sice mění délka struny a podle Hookova zákona i napětí v ní. Budeme však předpokládat, že tato změna síly σ je zanedbatelná (neboli $\sigma = \text{konst.}$), což bude splněno například tehdy, když struna má velké základní předpětí.

[1] Lineární hustota se často označuje též symbolem η.

Kapitola 10

Mechanika kontinua

V této závěrečné kapitole zavedeme základní pojmy teorie kontinua. Poté odvodíme a rozebereme hlavní rovnice určující chování tekutin, dokonalých i vazkých. Jedná se pouze o stručný úvod do rozsáhlé problematiky. Podrobnosti lze najít ve speciálních učebnicích i odborné literatuře věnované tomuto tématu, především v důkladných monografiích [2] a [33, 34].

10.1 Lagrangeův a Eulerův popis

Mechanické ***kontinuum*** obecně označuje ***spojité hmotné prostředí***. Speciálním případem je ***tekutina*** (společný název pro kapaliny, plyny a plazma) anebo klasická elastická ***pevná látka***. V tomto popisu se ignoruje atomární struktura látek, pracuje se s makroskopickými fyzikálními veličinami vystředovanými přes rozměry výrazně větší, než jsou vzdálenosti mezi atomy.

Hmotné prostředí se modeluje jako složené z nepatrných „částí“ hmoty, takzvaných ***materiálových částic***, lokalizovaných v malých oblastech, takzvaných ***reprezentativních elementárních objemech***, které v každém okamžiku t dohromady *spojitě vyplňují makroskopickou oblast* Ω_t v prostoru E_3. Každá z těchto materiálových částic kontinua se pohybuje určitou rychlostí $\mathbf{v}$, která se bod od bodu *spojitě* mění. Už proto je nelze ztotožnit s atomy a molekulami, jež podléhají kvantové evoluci a konají klasický chaotický tepelný pohyb. Rychlost elementárních materiálových částic kontinua je podle statistické fyziky určena *střední rychlostí* molekul v daném elementárním objemu. Jejich mikroskopický pohyb je zahrnut ve spojitě se měnících termodynamických veličinách (tlak, hustota, vnitřní energie, teplota, entropie).

Pohyb kontinua je pak popsán ***trajektorií jeho materiálových částic***, což z matematického hlediska je spojitá (v ideálním případě hladká), vzájemně jednoznačná, a tedy invertovatelná funkce χ, konkrétně

náhled do

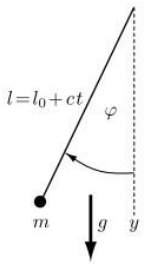
KNIHY TŘETÍ

Teoretická mechanika

v příkladech

Příklad 3-7.

Sestavte pohybovou rovnici ***kyvadla s proměnnou délkou***, jehož nehmotný závěs se linárně prodlužuje či zkracuje podle vzorce $l(t) = l_0 + c\,t$, kde l_0 a c jsou konstanty. Na konci kyvadla je těleso hmotnosti m. Ukažte, že pro malé kmity je řešení dáno Besselovými funkcemi J_1 a Y_1.



Řešení: Za zobecněnou souřadnici zvolíme výchylku φ bodu m z dolní polohy. Kinetická energie je $T = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2)$ a potenciální energie je $V = -mg\,y$, přičemž $y = l\cos\varphi$, viz obecný vzorec (3.13) pro polární souřadnice. Protože $l = l_0 + c\,t$ a tedy $\dot{l} = c$, má Lagrangeova funkce systému tvar

$$\boxed{L = \tfrac{1}{2}m\big(c^2 + (l_0 + c\,t)^2\dot{\varphi}^2\big) + mg(l_0 + c\,t)\cos\varphi}\,. \qquad (3.63)$$

Příslušné parciální derivace funkce L jsou $\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m(l_0 + c\,t)^2\dot{\varphi}$, $\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -mg(l_0 + c\,t)\sin\varphi$, takže Lagrangeova rovnice po zkrácení nenulovým faktorem $m(l_0 + c\,t)$ je

$$\boxed{(l_0 + c\,t)\,\ddot{\varphi} + 2c\,\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0}\,. \qquad (3.64)$$

Pro kyvadlo *pevné délky* l_0 je $c = 0$ a rovnice přechází na $\ddot{\varphi} + (g/l_0)\sin\varphi = 0$, což je rovnice matematického kyvadla (1.30). V obecném případě je výhodné provést ***substituci***

$$\boxed{\begin{aligned} t \to \tau &\equiv 2\frac{\sqrt{g}}{c}\sqrt{l_0 + c\,t}\,, \\ \varphi \to z &\equiv \tau\,\varphi\big(t(\tau)\big)\,. \end{aligned}} \qquad (3.65)$$

Přímočarým, ale zdlouhavějším výpočtem lze nyní užitím vztahů $\varphi = \frac{z}{\tau}$ a $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{2g}{c\tau}$ ukázat, že v nových proměnných má pohybová rovnice (3.64) tvar

$$\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\,\tau^2} + \frac{1}{\tau^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\,\tau} - \frac{1}{\tau^3}\,z + \sin\frac{z}{\tau} = 0\,. \qquad (3.66)$$

Pokud se omezíme na ***malé kmity***, je hodnota φ malá a lze provést linearizaci $\sin\varphi \approx \varphi$, čímž dostaneme

$$\boxed{\tau^2 z'' + \tau\,z' + (\tau^2 - 1)z = 0}\,, \qquad (3.67)$$

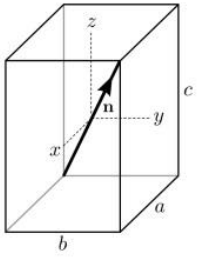
kde z' značí derivaci funkce $z(\tau)$ podle τ. To je v matematické teorii speciálních funkcí takzvaná ***Besselova rovnice*** řádu (indexu) $n = 1$, která má obecné řešení ve tvaru lineární superpozice Besselových funkcí prvního a druhého druhu, $z = A\,J_1(\tau) + B\,Y_1(\tau)$, kde A, B jsou konstanty.

Pro $\tau = 0$ funkce Y_1 diverguje, zatímco $J_1(0) = 0$, takže je přirozené položit $B = 0$. Řešení je pak popsáno jen hladkou oscilující funkcí J_1, jejíž amplituda kmitů postupně klesá k nule. Řešení v původní proměnné má tvar $\varphi(t) = A\,J_1(\tau)/\tau$, kde $\tau = 2\frac{\sqrt{g}}{c}\sqrt{l_0 + c\,t}$.

⊠

Příklad 5-5.

Spočítejte ***moment setrvačnosti homogenního kvádru*** hmotnosti m s hranami a, b, c vůči ***tělesové úhlopříčce***. Určete jeho kinetickou energii, otáčí-li se kolem ní úhlovou rychlostí Ω.



Řešení: Bylo by obtížné v tomto případě spočítat objemové integrály (5.25)–(5.27). Použijeme proto elegantnější a rychlejší metodu, a to vztah (5.15), tedy

$$I_{\mathbf{n}} = I_{ij}\, n_i n_j\,,$$

kde $I_{\mathbf{n}}$ označuje ***moment setrvačnosti tělesa vůči ose definované jednotkovým vektorem*** $\mathbf{n}$.

V příkladu 5-3 jsme již spočítali tenzor setrvačnosti kvádru v bázi hlavních os, viz (5.32)

$$I_{ij} = \tfrac{1}{12}\, m \begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}. \qquad (5.41)$$

Jednotkový vektor $\mathbf{n}$ ve směru tělesové úhlopříčky kvádru má v téže bázi složky

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,(a,b,c)\,. \qquad (5.42)$$

Algebraický vztah (5.15) tedy ihned dává

$$I_{\mathbf{n}} = I_{xx}\, n_x^2 + I_{yy}\, n_y^2 + I_{zz}\, n_z^2 = \tfrac{1}{12}\, m\, \frac{(b^2+c^2)\,a^2 + (a^2+c^2)\,b^2 + (a^2+b^2)\,c^2}{a^2+b^2+c^2}\,,$$

neboli po úpravě

$$\boxed{I_{\mathbf{n}} = \tfrac{1}{6}\, m\, \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}}\,. \qquad (5.43)$$

Příslušná ***kinetická energie otáčení kvádru*** je dána známým vzorcem $T = \frac{1}{2}\, I_{\mathbf{n}}\, \Omega^2$, takže

$$\boxed{T = \tfrac{1}{12}\, m\, \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\, \Omega^2}\,. \qquad (5.44)$$

Všimněte si, že pro ***krychli*** se stejnými hranami $a = b = c$ platí

$$I_{\mathbf{n}} = \tfrac{1}{6}\, m\, a^2\,, \qquad T = \tfrac{1}{12}\, m\, a^2\, \Omega^2\,, \qquad (5.45)$$

což je v plném souladu se vztahem (5.33), podle kterého

$$I_{\mathbf{n}} = I_{ij}\, n_i n_j = \tfrac{1}{6}\, m\, a^2\, \delta_{ij}\, n_i n_j = \tfrac{1}{6}\, m\, a^2\, n_i n_i = \tfrac{1}{6}\, m\, a^2\,. \qquad (5.46)$$

struktura a obsah trilogie

KNIHA PRVNÍ
Teoretická mechanika v klasické formulaci
180 stran

část I. Mechanika hmotných bodů
1 Newtonovská mechanika
2 Newtonovy rovnice s vazbami
3 Lagrangeův formalismus
4 Hamiltonův variační princip
5 Hamiltonův formalismus

část II. Mechanika tuhého tělesa
6 Kinematika tuhého tělesa
7 Dynamika tuhého tělesa
8 Aplikace: setrvačníky

část III. Mechanika kontinua
9 Rovnice struny a její řešení
10 Mechanika kontinua

KNIHA DRUHÁ
Teoret.mechanika v jazyce diferenciální geometrie
100 stran

1 Základy diferenciální geometrie

2 Geometrická formulace Lagrangeovy mechaniky

3 Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky

tři dodatky

KNIHA TŘETÍ
Teoretická mechanika v příkladech
110 stran

1 Newtonovská mechanika

2 Newtonovy rovnice s vazbami

3 Lagrangeův formalismus

4 Hamiltonův formalismus

5 Mechanika tuhého tělesa

Za největší autorův přínos a intelektuální výkon považuji druhý díl (resp. knihu) nazvaný ***Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie***. Po klasickém Lagrangeově a Hamiltonově formalismu znamená užití toho jazyka opětovný výstup do vyššího patra klasické mechaniky, ...

Geometrická formulace ukazuje, jak se lze v mechanice obejít bez souřadnic a jak takovéto podání umožňuje postřehnout základní rysy chování mechanických systémů. V české, ale ani ve světové literatuře neznám dílo, které by problematiku takto zpracovalo způsobem spojujícím přednosti exaktnosti a názornosti.

Zde, ale i v celé knize září starý poklad fyziky novým světlem, ...

prof. Novotný

náhled do

KNIHY DRUHÉ

Teoretická mechanika v jazyce
diferenciální geometrie

varieta

Kapitola 1

Základy diferenciální geometrie

Diferenciální geometrie je společným jazykem velké části moderní fyziky. Jedná se v podstatě o spojení geometrie a matematické analýzy, kdy jsou metody klasického kalkulu aplikovány na křivky, plochy a další vícerozměrné geometrické objekty. Zavedení pojmů a manipulace s nimi jsou přitom oproštěny od konkrétních souřadnic. Další podrobnosti lze najít ve speciálních monografiích, například [21, 22] a [35]–[38].

1.1 Variety a základní objekty na nich

Fundamentálním pojmem diferenciální geometrie je varieta. Následující odstavce proto věnujeme jeho zavedení a popisu. Poté na varietách postupně vybudujeme bohatou strukturu: funkce, křivky, vektory a 1-formy, 2-formy i p-formy. Pak připojíme další důležité koncepty, zejména integrální křivky vektorového pole, příslušný tok, Lieovu derivaci a závorku.

1.1.1 Pojem variety $\mathcal{M}$

Různé variety jsou arénou nejen klasické mechaniky, ale i mnoha dalších oborů fyziky a matematiky. Jmenujme například polní teorie (elektromagnetismus a další kalibrační pole), teorii relativity, prostory řešení diferenciálních rovnic či Lieovy grupy.

Obecně (avšak vágně) lze varietu charakterizovat jako „spojitý prostor, který je lokálně kartézský a lze na něm provádět derivování“.[1] Varietou tedy *není* například množina racionálních čísel.

[1] Nemusí být přitom metrický, eukleidovský, afinní, apod.

Názorná ilustrace: *zemský povrch (globus).*

Příkladem jednoduché variety je zemský povrch. Můžeme ho idealizovat jako sféru, tedy spojitou zakřivenou dvourozměrnou plochu $\mathcal{S}^2$, pro kterou zjevně platí:

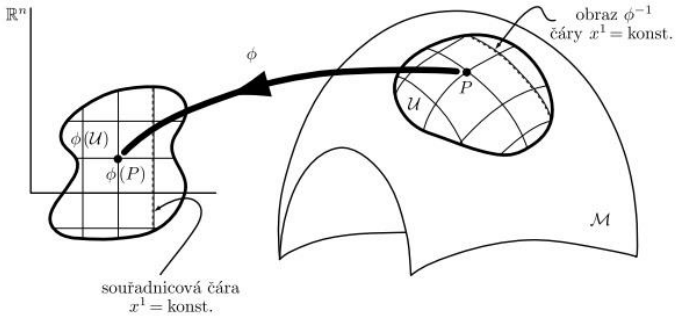
- lokálně můžeme zavést mapy souřadnic (např. mapu Evropy, Asie, atd.),
- mapy dohromady tvoří atlas pokrývající celou varietu $\mathcal{S}^2$,
- trajektorie (např. jedoucího vlaku) je omezena jen na varietu,
- vůči jednotlivým mapám lze studovat nejen trajektorii, ale i rychlost nebo zrychlení, lze tedy derivovat a integrovat,
- údaje určené z jednotlivých map lze mezi mapami na jejich překryvech konzistentně převádět, příslušné veličiny jsou tak určeny globálně, tedy „bez ohledu“ na konkrétní mapy.

Zjednodušeně řečeno je tedy varieta $\mathcal{M}$ dimenze n množina bodů, která je *lokálně* podobná kartézskému prostoru $\mathbb{R}^n$, neboli okolí každého bodu může být parametrizováno n nezávislými souřadnicemi.

Přesnější matematická definice je:

varieta $\mathcal{M}$ je množina, jejíž každý bod P leží v nějaké *otevřené množině* $\mathcal{U}$,[2] která je *spojitě vzájemně jednoznačně* zobrazená na otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^n$. Symbolicky to lze vyjádřit

$$\forall\, P \in \mathcal{M} \;\; \exists \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \text{ taková, že } P \in \mathcal{U},$$
$$\text{a } \exists \text{ spojité } \phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \text{ takové, že } \mathcal{U} \leftrightarrow \phi(\mathcal{U}) \text{ je jednoznačné,}$$



Obrázek 1.1: Varieta $\mathcal{M}$, zde nakreslená pro dimenzi $n = 2$, je pokryta (lokálními) mapami neboli zobrazeními ϕ z $\mathcal{U}$ do (otevřených podmnožin) $\mathbb{R}^n$.

[2] Tento systém otevřených množin tvoří z $\mathcal{M}$ axiomaticky definovaný *topologický prostor*.

vektory, formy, kontrakce, diferenciál,

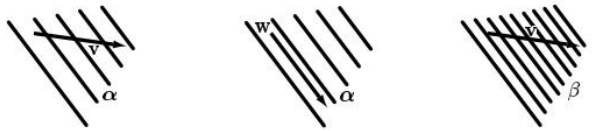
báze tečného a kotečného prostoru

Obrázek 1.6: Kotečný prostor $\mathrm{T}^*_p\mathcal{M}$ 1-forem (vpravo) je duální k tečnému prostoru $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ vektorů v bodě P (vlevo).

bilineární operaci ***zúžení*** (kontrakce), kterou označujeme

$$\boxed{\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v} \rangle \equiv \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})} \,. \tag{1.8}$$

Výsledkem zúžení vektoru s 1-formou je tedy reálné číslo z definice (1.7). Jestliže reprezentujeme 1-formu $\boldsymbol{\alpha}$ pomocí ***vrstevnic*** a vektor $\mathbf{v}$ pomocí ***šipky***, pak význam čísla $\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v} \rangle$ geometricky odpovídá ***počtu vrstevnic, které šipka protne***. Záleží zjevně na jejich vzájemné orientaci a velikosti. Čím je 1-forma větší, tím jsou její vrstevnice hustší. Čím je vektor větší, tím delší je jeho šipka.



Ve více dimenzích n je forma $\boldsymbol{\alpha}$ reprezentována vrstevnicovými *nadplochami* dimenze $(n-1)$.

Bázi kotečného prostoru $\mathrm{T}^*_p\mathcal{M}$ tvoří n 1-forem $(\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n)$ takových, že každou 1-formu z $\mathrm{T}^*_p\mathcal{M}$ lze vyjádřit jako[9] $\boxed{\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i \, \boldsymbol{\varepsilon}^i}$, kde α_i představují složky $\boldsymbol{\alpha}$ v této bázi. Obvykle za bázi 1-forem volíme ***duální bázi*** k bázovým vekorům $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ definovanou předpisem

$$\boxed{\langle \boldsymbol{\varepsilon}^i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta^i_j} \,. \tag{1.9}$$

Jako okamžitý důsledek (1.9) dostáváme následující vztahy

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \alpha_i \, \boldsymbol{\varepsilon}^i, \mathbf{e}_j \rangle = \alpha_i \, \langle \boldsymbol{\varepsilon}^i, \mathbf{e}_j \rangle = \alpha_i \, \delta^i_j = \alpha_j \,, \tag{1.10}$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^j, \mathbf{v} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^j, v^i \, \mathbf{e}_i \rangle = v^i \langle \boldsymbol{\varepsilon}^j, \mathbf{e}_i \rangle = v^i \, \delta^j_i = v^j \,, \tag{1.11}$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v} \rangle = \langle \alpha_i \, \boldsymbol{\varepsilon}^i, v^j \mathbf{e}_j \rangle = \alpha_i \, v^j \langle \boldsymbol{\varepsilon}^i, \mathbf{e}_j \rangle = \alpha_i \, v^i \,. \tag{1.12}$$

[9] Srovnej se vztahem $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ pro vektory.

Diferenciál funkce f coby 1-forma $\mathbf{d}f$:

Nejdůležitější 1-formou je ***diferenciál funkce***. Je-li f hladká funkce na varietě $\mathcal{M}$, potom diferenciál funkce f v bodě $P \in \mathcal{M}$ je forma $\mathbf{d}f$ definovaná vztahem

$$\boxed{\langle \mathbf{d}f, \mathbf{v} \rangle \equiv \mathbf{v}(f)} \,. \tag{1.13}$$

Zúžení 1-formy $\mathbf{d}f \in \mathrm{T}^*_p\mathcal{M}$ s vektorem $\mathbf{v} \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}$ tedy je právě *derivace funkce f ve směru vektoru* $\mathbf{v}$, viz vztahy (1.3), (1.4).

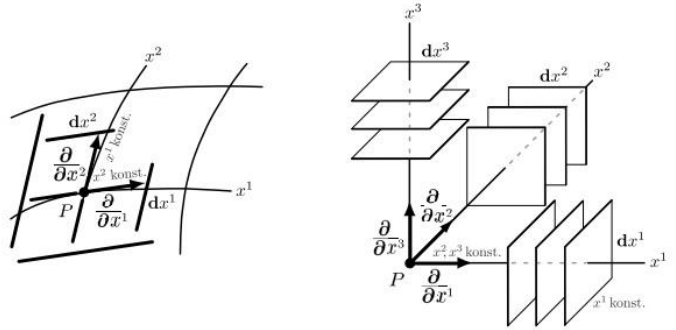
Důsledek: Vezmeme-li za vektor $\mathbf{v}$ přímo vektory (1.6) souřadnicové báze $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ a za funkci f přímo různé souřadnice x^i z lokální mapy $(\mathcal{U}, \phi)$, pak z definice (1.13) plyne

$$\langle \mathbf{d}x^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \equiv \mathbf{v}(f) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j \,. \tag{1.14}$$

Srovnáme-li výraz (1.14) s definicí duální báze (1.9), ihned dostáváme, že

$$\boxed{(\mathbf{d}x^1, \ldots, \mathbf{d}x^n) \text{ je } \textbf{\textit{duální souřadnicová báze}} \text{ kotečného prostoru } \mathrm{T}^*_p\mathcal{M}} \,. \tag{1.15}$$

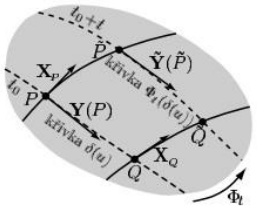
Geometricky: Vektor $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ je znázorněn šipkou ve směru souřadnicové čáry x^i, duální 1-forma $\mathbf{d}x^i$ je znázorněna množinou vrstevnic (nadploch) $x^i = \text{konst.}$, viz obrázek 1.7. Připomeňme, že lokální souřadnicová čára z bodu P je jednorozměrná křivka, kdy se mění jediná souřadnice x^i, zatímco zbylých $(n-1)$ souřadnic má konstatní hodnotu. Naopak duální vrstevnice (nadplocha) je definována konstantní hodnotou x^i, přičemž všechny ostatní souřadnice, jichž je $(n-1)$, se mění.



Obrázek 1.7: Souřadnicová báze $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ vektorů a duální souřadnicová báze $\mathbf{d}x^i$ 1-forem v bodě P. Vlevo je jejich znázornění pro varietu dimenze $n = 2$ s obecnými souřadnicemi, vpravo pro varietu dimenze $n = 3$ s kartézskými souřadnicemi.

Lieova derivace

- ***Lieův přenos vektorového pole*** $\mathbf{Y}$ podél pole $\mathbf{X}$ je nové pole $\tilde{\mathbf{Y}}$ definované
$$\tilde{\mathbf{Y}}(\tilde{P}) = \Phi_{t*}\big(\mathbf{Y}(P)\big)\,. \tag{1.51}$$
- ***Lieův přenos pole 1-forem*** $\boldsymbol{\theta}$ podél pole $\mathbf{X}$ je analogicky dán
$$\boldsymbol{\theta}(P) = \Phi_t^*\big(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{P})\big)\,. \tag{1.52}$$



Obrázek 1.12: Lieův přenos vektoru je dán push-forward zobrazením Φ_{t*} indukovaným tokem Φ_t, které je generováno vektorovým polem $\mathbf{X}$. Konkrétně: vektor $\tilde{\mathbf{Y}}(\tilde{P})$ v bodě $\tilde{P}$ je definován jako tečna ke křivce $\Phi_t\big(\delta(u)\big)$, kde $\delta(u)$ je křivka tečná k výchozímu vektoru $\mathbf{Y}(P)$ v bodě P.

1.5 Lieova derivace $\mathscr{L}_{\mathbf{X}}$

Smyslem Lieovy derivace je charakterizovat *změnu geometrického objektu ve směru vektorového pole* $\mathbf{X}$. Toho se docílí tím způsobem, že hodnotu veličiny v daném bodě P odečteme od hodnoty veličiny tam Lieovsky přenesené (pull-backem) z bodu $\tilde{P}$ ze „vzdálenosti“ t, tento rozdíl vydělíme t a provedeme limitu $t \to 0$. Konkrétně:

- ***Lieova derivace funkce*** f je funkce
$$\mathscr{L}_{\mathbf{X}} f(P) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[f(\tilde{P}) - f(P)\big], \tag{1.53}$$
- ***Lieova derivace vektorového pole*** $\mathbf{Y}$ je vektorové pole
$$\mathscr{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}(P) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[\Phi_{-t*}\big(\mathbf{Y}(\tilde{P})\big) - \mathbf{Y}(P)\big], \tag{1.54}$$
- ***Lieova derivace pole 1-forem*** $\boldsymbol{\theta}$ je pole 1-forem
$$\mathscr{L}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta}(P) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[\Phi_t^*\big(\boldsymbol{\theta}(\tilde{P})\big) - \boldsymbol{\theta}(P)\big], \tag{1.55}$$

přičemž $\tilde{P} = \Phi_t(P) \equiv \Phi_t^{\mathbf{X}}(P)$. S přihlédnutím k (1.45) a (1.39) vidíme, že (1.53)–(1.55) lze v každém bodě P zapsat jednotným způsobem, jenž umožňuje koncept Lieovy derivace zobecnit na ***libovolné tenzorové pole*** $\mathbf{T}$,
$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{T} \equiv \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[\Phi_t^*(\mathbf{T}) - \mathbf{T}\big]}\,, \tag{1.56}$$
kde *pull-back* Φ_t^* *obecného tenzoru* (příslušející toku Φ_t) je definován v (1.37).

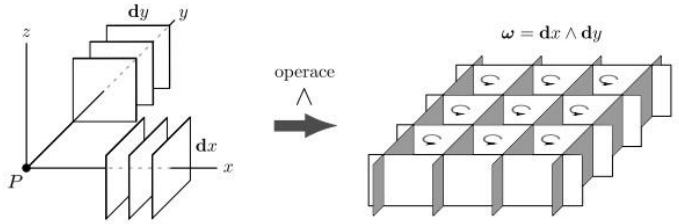
Protože $\Phi_0^*(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ a definice platí pro libovolný tenzor, můžeme ***operátor Lieovy derivace*** symbolicky zapsat vztahem
$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{X}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 \Phi_t^*}\,. \tag{1.57}$$
Tento operátor exaktně vyjadřuje změnu (nekonstantnost) příslušného geometrického objektu ve směru vektorového pole $\mathbf{X}$. Pomocí Lieovy derivace lze naopak vyjádřit pull-back (konečného) toku „exponenciálním“ vzorcem [21]
$$\boxed{\Phi_t^* = \mathbf{1} + t\,\mathscr{L}_{\mathbf{X}} + \tfrac{1}{2}t^2 \mathscr{L}_{\mathbf{X}}\mathscr{L}_{\mathbf{X}} + \dots}\,. \tag{1.58}$$

Nyní lze ukázat, že platí následující ***důležité vztahy***:

1. *Lieova derivace funkce* je přímo rovna derivaci ve směru $\mathbf{X}$,[14]
$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X}(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \langle \mathbf{d}f, \mathbf{X}\rangle = \mathbf{d}f(\mathbf{X}) = \mathrm{i}_{\mathbf{X}}\mathbf{d}f}\,. \tag{1.59}$$
2. Platí, že
$$\mathscr{L}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = (\mathscr{L}_{\mathbf{X}} f)\mathbf{Y} + f\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}\,, \tag{1.60}$$
$$\mathscr{L}_{\mathbf{X}}(f\boldsymbol{\theta}) = (\mathscr{L}_{\mathbf{X}} f)\boldsymbol{\theta} + f\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}\,. \tag{1.61}$$
3. Pro *Lieovu derivaci zúžení* platí Leibnizovo pravidlo
$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}\rangle = \langle \mathscr{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}\rangle + \langle \boldsymbol{\theta}, \mathscr{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}\rangle}\,. \tag{1.62}$$
4. Pro *diferenciál* platí $\mathscr{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{d}f) = \mathbf{d}(\mathscr{L}_{\mathbf{X}} f)$, tedy
$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{d} = \mathbf{d}\,\mathscr{L}_{\mathbf{X}}}\,. \tag{1.63}$$
5. Definujeme-li ***Lieovu závorku*** vektorových polí vztahem[15]
$$\boxed{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv \mathbf{XY} - \mathbf{YX}}\,, \tag{1.64}$$
pak pro takto vzniklé vektorové pole platí
$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\,. \tag{1.65}$$
6. Explicitní *vyjádření ve složkách* je
$$\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^i}\,, \tag{1.66}$$
$$\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta} = \left(X^j \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} + \theta_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\mathbf{d}x^i\,. \tag{1.67}$$

[14] Operace $\mathrm{i}_{\mathbf{X}}$ vložení vektoru $\mathbf{X}$ do formy $\mathbf{d}f$ je definována v části 1.7.
[15] Výraz $\mathbf{XY} - \mathbf{YX}$ má význam *komutátoru* operátorů daných vektorovými poli $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$, tedy pro libovolnou funkci f platí $(\mathbf{XY} - \mathbf{YX})(f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$.

2-formy

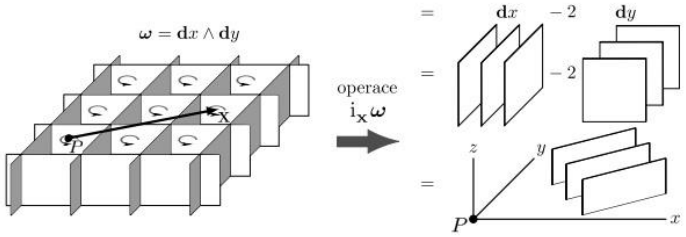


Obrázek 1.15: Geometrická reprezentace operace vnějšího součinu $\wedge$. Mřížka 2-formy $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$ (zde pravidelná čtvercová plástev) vzniká kombinací vrstevnic (ploch) 1-formy $\mathbf{d}x$ a 1-formy $\mathbf{d}y$.

Graficky lze znázornit také operaci (1.81) ***vložení vektoru*** $\mathbf{X}$ do 2-formy $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$, neboli

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}(\bullet) = \boldsymbol{\omega}(\bullet, \mathbf{X}) = (\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y)(\bullet, \mathbf{X}) = \mathbf{d}x(\bullet)\,\mathbf{d}y(\mathbf{X}) - \mathbf{d}y(\bullet)\,\mathbf{d}x(\mathbf{X}).$$

Na obrázku 1.16 protíná $\mathbf{X}$ dvě stěny ve směru x a jednu ve směru y, takže $\mathbf{d}x(\mathbf{X}) = 2$ a $\mathbf{d}y(\mathbf{X}) = 1$. Proto je $\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}x - 2\,\mathbf{d}y$. Tato 1-forma je reprezentována vrstevnicovými plochami *rovnoběžnými* s vektorem $\mathbf{X}$. Ten opravdu nemůže protnout žádnou plochu, neboť $(\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$.



Obrázek 1.16: Geometrická reprezentace operace $\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}$ vložení vektoru $\mathbf{X}$ do 2-formy $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$. Zde $\mathbf{X} = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ a výsledkem je 1-forma $\mathbf{d}x - 2\,\mathbf{d}y$ se svislými plochami rovnoběžnými s $\mathbf{X}$.

p-formy, Cartanova identita

Cartanova identita: Pro každou p-formu platí

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{x}} = (-1)^p \left[\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d} - \mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\right]}. \tag{1.103}$$

Důkaz: Nechť f, g jsou libovolné funkce, potom

- pro 0-formy f:
  Přímočarou aplikací (1.59) a (1.79) dostáváme
  $$\mathscr{L}_{\mathbf{x}} f = \mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d}f = \left[\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d} - \mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\right] f\,. \tag{1.104}$$
- pro 1-formy $\mathbf{d}g$:
  Pomocí (1.63) a (1.96) snadno dokážeme, že
  $$\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{d}g = \mathbf{d}\,(\mathscr{L}_{\mathbf{x}} g) = \mathbf{d}\,(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d}g) = -\left[\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d} - \mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\right]\mathbf{d}g\,. \tag{1.105}$$
- pro zcela obecné p-formy:
  Operátor Lieovy derivace $\mathscr{L}_{\mathbf{x}}$ je lineární a splňuje Leibnizovo pravidlo, přičemž platí vztahy (1.104) a (1.105). Stačí tedy dokázat, že také operátor $(-1)^p\left[\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d} - \mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\right]$ je lineární (což je triviální) a splňuje Leibnizovo pravidlo. K tomu použijeme graduovanou verzi Leibnizova pravidla pro vnější derivaci (1.99) a vložení do vnějšího součinu (1.102).

  Definujme Cartanův operátor působící na r-formu
  $$\boxed{(-1)^r\,\mathcal{C} \equiv \mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d} - \mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}}, \tag{1.106}$$
  který aplikujeme na r-formu $\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}$, kde α je p-forma a β je q-forma, takže $r \equiv p + q$. Tím dostaneme r-formu

$$\begin{aligned}
(-1)^r\,\mathcal{C}(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}) &\equiv \mathrm{i}_{\mathbf{x}}\left[\mathbf{d}\,(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})\right] - \mathbf{d}\left[\mathrm{i}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})\right] \\
&= \mathrm{i}_{\mathbf{x}}\left[(\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha})\wedge\boldsymbol{\beta} + (-1)^p\,\boldsymbol{\alpha}\wedge(\mathbf{d}\boldsymbol{\beta})\right] \\
&\quad -\mathbf{d}\left[\boldsymbol{\alpha}\wedge(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) + (-1)^q\,(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\alpha})\wedge\boldsymbol{\beta}\right] \\
&= (\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha})\wedge(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) + (-1)^q\,(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha})\wedge\boldsymbol{\beta} \\
&\quad +(-1)^p\left[\boldsymbol{\alpha}\wedge(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}) + (-1)^{q+1}\,(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\alpha})\wedge(\mathbf{d}\boldsymbol{\beta})\right] \\
&\quad -\left[(\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha})\wedge(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}) + (-1)^p\,\boldsymbol{\alpha}\wedge(\mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})\right] \\
&\quad -(-1)^q\left[(\mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\alpha})\wedge\boldsymbol{\beta} + (-1)^{p-1}\,(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\alpha})\wedge(\mathbf{d}\boldsymbol{\beta})\right].
\end{aligned}$$

Čtyři z osmi členů se navzájem odečtou a zbylé čtyři lze uspořádat do tvaru

$$\begin{aligned}
(-1)^r\,\mathcal{C}(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}) &= (-1)^q\left[(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha})\wedge\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\alpha})\wedge\boldsymbol{\beta}\right] \\
&\quad +(-1)^p\left[\boldsymbol{\alpha}\wedge(\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\alpha}\wedge(\mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})\right] \\
&= (-1)^q\left(\left[\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d} - \mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\right]\boldsymbol{\alpha}\right)\wedge\boldsymbol{\beta} + (-1)^p\,\boldsymbol{\alpha}\wedge\left[\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\mathbf{d} - \mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\right]\boldsymbol{\beta} \\
&= (-1)^q(-1)^p\,\mathcal{C}(\boldsymbol{\alpha})\wedge\boldsymbol{\beta} + (-1)^p\,\boldsymbol{\alpha}\wedge(-1)^q\,\mathcal{C}(\boldsymbol{\beta}) \\
&= (-1)^{p+q}\left(\mathcal{C}(\boldsymbol{\alpha})\wedge\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\wedge\mathcal{C}(\boldsymbol{\beta})\right),
\end{aligned}$$

Kapitola 2

Geometrická formulace Lagrangeovy mechaniky

V této kapitole nyní ukážeme, že přirozenou arénou časově nezávislé Lagrangeovy mechaniky je tečný bandl $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ konfigurační variety $\mathcal{Q}$, a že dynamický vývoj je určen vektorovým polem $\mathbf{X}$, které řeší Lagrangeovy rovnice v geometrickém tvaru $\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_{L} = \mathbf{d}L$. Integrální křivky $\gamma(t)$ tohoto pole $\mathbf{X}$ určují fázový portrét daného systému. Zformulujeme a dokážeme také významný teorém Emmy Noetherové, který dává do souvislosti symetrie Lagrangeovy funkce a zákony zachování.

2.1 Fázový portrét a dynamické vektorové pole

Fázový portrét je znázornění možného vývoje systému hmotných bodů v grafu rychlost versus poloha, tedy $v(x)$. Prostor parametrů (x, v) nazýváme též „rychlostní fázový prostor“. Jak plyne z části 1.3:

- Jedná se o množinu křivek $\gamma(t)$: každým nesingulárním bodem prochází právě jedna křivka.
- Každá křivka je jednoznačně určena počátečními podmínkami (x_0, v_0).
- Bod v rychlostním fázovém prostoru (x, v) určuje fyzikální stav systému.

Zmíněné křivky $\gamma(t)$ vývoje systému lze chápat jako *integrální křivky* speciálního vektorového pole $\mathbf{X}$, které nazýváme ***dynamické vektorové pole***. To je (pro případ $n = 1$) určeno výrazem

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} = v\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x} + a\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}v}\,, \tag{2.1}$$

kde v je okamžitá rychlost a a je zrychlení částice, jež je v konkrétním případě určeno Newtonovou pohybovou rovnicí $ma = F$, tedy $a = F/m$.

Důvodem je, že na tečném bandlu $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ se souřadnicemi $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ obecně pro každou hladkou funkci f platí

$$\mathbf{X}(f) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q^j(t)}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial f}{\partial q^j} + \frac{\mathrm{d}\dot{q}^j(t)}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^j}\,, \tag{2.18}$$

přičemž je přirozené provést podél trajektorie vývoje $\gamma(t)$ v každém okamžiku $t = t_0$ identifikaci zobecněných rychlostí a zrychlení

$$\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{q}^j\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\dot{q}^j}{\mathrm{d}t} \equiv W^j(q^i, \dot{q}^i)\,. \tag{2.19}$$

Podrobnější rozbor tohoto problému je uveden v dodatku A.

Integrální křivky právě takovýchto vektorových polí $\mathbf{X}$ druhého řádu na $\mathrm{T}\mathcal{Q}$, tedy tvaru (2.17), určují dynamiku soustavy v Lagrangeově formalismu.

2.4 Geometrická podoba Lagrangeových rovnic

Nyní již můžeme přejít ke klíčové otázce, jak nalézt zmíněné unikátní dynamické vektorové pole $\mathbf{X}$ druhého řádu příslušející dané Lagrangeově funkci L na tečném bandlu $\mathrm{T}\mathcal{Q}$. Ukážeme, že toto pole musí splňovat rovnici

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_{L} = \mathbf{d}L}\,, \tag{2.20}$$

což jsou geometricky vyjádřené ***Lagrangeovy rovnice***. Nejprve objasníme jejich význam.

Levou stranu (2.20) tvoří Lieova derivace tzv. ***Lagrangeovy 1-formy*** podle námi hledaného vektorového pole $\mathbf{X}$ (které musí být druhého řádu). Lagrangeova 1-forma je speciální 1-forma na $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ definovaná v lokálních zobecněných souřadnicích výrazem

$$\boxed{\boldsymbol{\theta}_{L} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\,\mathbf{d}q^j}\,. \tag{2.21}$$

Všimněme si, že tato 1-forma, na rozdíl od obecné 1-formy,[2] má pouze složky tvaru $\mathbf{d}q^j$. Striktně vzato, jedná se o (velmi speciální) pole 1-forem, které jsou řezem $\mathrm{T}^*(\mathrm{T}\mathcal{Q})$, viz část 1.3, kde nyní $\mathcal{M} = \mathrm{T}\mathcal{Q}$.

Důkaz platnosti rovnice (2.20). Uvažme Lieovu derivaci Lagrangeovy 1-formy podél obecného vektorového pole $\mathbf{X}$. Aplikací Leibnizova pravidla dostaneme

$$\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_{L} = \mathscr{L}_{\mathbf{X}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\,\mathbf{d}q^j\right) = \left(\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\,\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{d}q^j\right). \tag{2.22}$$

Dále využijeme vztahu $\mathscr{L}_{\mathbf{X}} f \equiv \mathbf{X}(f) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f$, viz (1.59), a skutečnosti, že $\mathscr{L}_{\mathbf{X}}$ a $\mathbf{d}$ navzájem komutují, viz (1.63), tudíž

$$\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_{L} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\right]\mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\,\mathbf{d}\left(\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t}\right) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\right]\mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\,\mathbf{d}\dot{q}^j\,. \tag{2.23}$$

[2] Je dobré si připomenout, že zcela obecná 1-forma v určitém bodě variety $Z \in \mathrm{T}\mathcal{Q}$ má tvar $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{d}q^1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{d}q^n + \beta_1\mathbf{d}\dot{q}^1 + \ldots + \beta_n\mathbf{d}\dot{q}^n$.

Kapitola 3

Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky

V této kapitole zjistíme, že přechod od Lagrangeovy k Hamiltonově formulaci klasické mechaniky geometricky odpovídá Legendreově duální transformaci mezi tečným bandlem $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ a kotečným bandlem $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ konfigurační variety $\mathcal{Q}$. Poté ukážeme, že přirozenou arénou časově nezávislé Hamiltonovy mechaniky je fázový prostor Γ, který je vybaven takzvanou symplektickou strukturou. To znamená, že na něm existuje symplektická 2-forma $\boldsymbol{\omega}$. Hamiltonovy rovnice mají tvar $\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}H$, což je geometrická rovnice pro hamiltonovské vektorové pole $\mathbf{X}$, jehož integrální křivky $\gamma(t)$ určují vývoj systému ve fázovém prostoru. Ukážeme také geometrický význam Poissonových závorek a kanonických transformací.

3.1 Legendreova duální transformace

Stručně řečeno, z geometrického hlediska můžeme oba zásadní přístupy k mechanice – Lagrangeův a Hamiltonův – shrnout takto:

Lagrange: klíčová je funkce L na $\mathrm{T}\mathcal{Q}$, což je ***tečný bandl*** variety $\mathcal{Q}$,

Hamilton: klíčová je funkce H na $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$, což je ***kotečný bandl*** variety $\mathcal{Q}$.

Oba fibrované prostory $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ a $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ jsou dobré nosiče dynamiky, protože *separují trajektorie vývoje*, to znamená, že každým jejich bodem prochází právě jedna křivka vývoje $\gamma(t)$.

Přechod $\dot{q}^j \to p_j$, jak ho známe z klasických učebnic teoretické mechaniky, není pouhá „změna souřadnic“ na tečném bandlu $\mathrm{T}\mathcal{Q}$, ale je to (lokální souřadnicová) reprezentace zobrazení

$$\mathrm{T}\mathcal{Q} \to \mathrm{T}^*\mathcal{Q}\,, \tag{3.1}$$

tedy duální identifikace vektoru $\mathbf{v}$ v bodě P (se složkami $\dot{q}^j$) s odpovídající 1-formou $\boldsymbol{\alpha}$ v tomtéž bodě P (se složkami p_j). Ve skutečnosti se jedná o *bijekci* $\mathbf{v} \leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}$ (mezi levou a pravou částí obrázku 1.6).

3.3 Geometrická podoba Hamiltonových rovnic

Nyní postoupíme dále v geometrické formulaci Hamiltonovy mechaniky. Ukazuje se totiž, že symplektickou matici $\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$ lze chápat jako *souřadnicové složky symplektické 2-formy* $\boldsymbol{\omega}$ na kotečném bandlu $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$. Právě tato symplektická forma $\boldsymbol{\omega}$ tvoří ústřední geometrický pojem hamiltonovského přístupu. (Zavedení obecných 2-forem je v části 1.7.)

Definice:

symplektická forma je 2-forma $\boldsymbol{\omega}$, která je

- ***uzavřená*** … $\boxed{\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0}$,
- ***nedegenerovaná*** … $\boxed{\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = 0}$.

Vynásobením obou stran Hamiltonových kanonických rovnic (3.25) bázovou 1-formou $\mathbf{d}z^\alpha$ a vyscítáním přes α dostáváme vztah

$$\omega_{\alpha\beta}\,\dot{z}^\beta\,\mathbf{d}z^\alpha = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha}\,\mathbf{d}z^\alpha\,, \tag{3.31}$$

kde $\omega_{\alpha\beta}$ jsou složky 2-formy $\boldsymbol{\omega}$, viz (1.76), a $\dot{z}^\beta$ jsou složky dynamického vektorového pole $\mathbf{X}$ příslušejícího H, viz (3.27). Jak je vidět z (1.84), celá levá strana odpovídá 1-formě, jež vzniká vložením dynamického vektorového pole $\mathbf{X}$ do symplektické 2-formy $\boldsymbol{\omega}$. Pravá strana je 1-forma $\mathbf{d}H$, tedy diferenciál Hamiltonovy funkce. Vztah (3.31) vyjadřuje vztah mezi 1-formami, který můžeme oprostit od konkrétních souřadnic na $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$.

Hamiltonovy kanonické rovnice
v ryze geometrické řeči tedy mají velmi elegantní tvar

$$\boxed{\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}H}\,. \tag{3.32}$$

Vyjádřeno slovy: *vývoj systému je určen integrálními křivkami takového vektorového pole* $\mathbf{X}$*, které vložením do symplektické 2-formy* $\boldsymbol{\omega}$ *dá právě diferenciál zadané Hamiltonovy funkce.*

Tuto rovnici můžeme pro $n = 1$ graficky vizualizovat a názorně interpretovat, použijeme-li námi již zavedené reprezentace vektoru $\mathbf{X}$ pomocí šipky a 1-formy $\mathbf{d}H$ pomocí soustavy vrstevnic (viz část 1.1.5 textu) a také 2-formy $\boldsymbol{\omega}$ pomocí orientované mřížky resp. plástve, včetně operace vložení vektoru $\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}$ do ní (viz část 1.7). Výsledkem je „grafická rovnice“ znázorněná na obrázku 3.2. Rozeberme trochu podrobněji zde zobrazené geometrické objekty i vztahy mezi nimi.

aplikace: teorém Emmy Noetherové

kde $q^l(t)$ je souřadnicové vyjádření libovolné křivky určující tečný vektor $\mathbf{v} \in \mathrm{T}_p\mathcal{Q}$ se složkami $\dot{q}^l$. (Výraz (2.41) odpovídá transformaci (1.32) vektoru při aktivním zobrazení push-forward.) Pro $\mathbf{Z}$ tedy dostáváme vyjádření

$$\boxed{\mathbf{Z} = Z^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^l}\dot{q}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}}\,. \tag{2.42}$$

Nyní již můžeme teorém Emmy Noetherové formulovat, a to následujícím způsobem:

Definice: Funkce g je ***integrál pohybu***, jestliže má stále stejnou hodnotu podél křivek pole $\mathbf{X}$ (tedy při časovém vývoji systému), neboli když platí

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{X}} g = 0}\,. \tag{2.43}$$

Teorém: Jestliže se hodnota Lagrangeovy funkce L nemění podél křivek symetrie generovaných $\mathbf{Z}$, neboli

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{Z}} L = 0}\,, \tag{2.44}$$

pak funkce g daná vztahem

$$\boxed{g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z}\rangle} \tag{2.45}$$

je integrál pohybu.

Abychom mohli ukázat platnost vysloveného teorému, dokážeme nejprve pomocné tvrzení:

Lemma: Platí, že

$$\langle \boldsymbol{\theta}_L, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]\rangle = 0\,. \tag{2.46}$$

Důkaz lemmatu: Připomeňme, že vektorová pole $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Z}$ jsou, viz (2.17) a (2.42),

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j} + W^j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\,,\\ \mathbf{Z} &= Z^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^l}\dot{q}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\,.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Také si uvědomme, že zde můžeme vynechat všechny členy tvaru $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$. Opravdu: protože $\boldsymbol{\theta}_L \sim \mathbf{d}q^j$, viz definice (2.21), platí

$$\langle \boldsymbol{\theta}_L, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\rangle = 0\,, \tag{2.48}$$

lagrangeovská verze

Z geometrické definice (3.53) okamžitě pro Poissonovy závorky plyne

- antisymetrie,
- bilinearita,
- z uzavřenosti symplektické formy ($\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0$) plyne také Jacobiho identita,

takže struktura Poissonových závorek $\{\bullet,\bullet\}$ tvoří *Lieovu algebru* na symplektické varietě.

Navíc platí následující vztahy:

$$\{f,g\} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_f) = \mathrm{i}_{\mathbf{X}_g}\boldsymbol{\omega}(\bullet, \mathbf{X}_f) = \mathrm{i}_{\mathbf{X}_g}(\mathbf{d}f) \equiv \langle \mathbf{d}f, \mathbf{X}_g\rangle = \mathbf{X}_g f = \mathscr{L}_{\mathbf{X}_g} f\,, \tag{3.57}$$

tedy

$$\{f,g\} = \mathscr{L}_{\mathbf{X}_g} f\,, \qquad \{g,f\} = \mathscr{L}_{\mathbf{X}_f} g\,, \tag{3.58}$$

takže

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{X}_g} f = -\mathscr{L}_{\mathbf{X}_f} g}\,. \tag{3.59}$$

3.6 Hamiltonova verze teorému Emmy Noetherové

V části 2.5 jsme odvodili lagrangeovskou formulaci teorému Noetherové. Stručně řečeno, pokud $\mathscr{L}_{\mathbf{Z}} L = 0$, pak $\mathscr{L}_{\mathbf{X}} g = 0$, kde $g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z}\rangle$. Jinými slovy, veličina g je v takovém případě integrálem pohybu, protože se nemění podél integrálních křivek dynamického vektorového pole $\mathbf{X}$.

Hamiltonova verze teorému Emmy Noetherové je ještě mnohem elegantnější a zní:

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathbf{X}_g} H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{L}_{\mathbf{X}_H} g = 0}\,. \tag{3.60}$$

Důkaz: Stačí jen aplikovat identitu (3.59) pro $f = H$, tedy $0 = \mathscr{L}_{\mathbf{X}_g} H = -\mathscr{L}_{\mathbf{X}_H} g$. ⊠

Příklady:

1. $g = p_1$, tedy hybnost. Pomocí (3.51) a pravidla (3.46) je $\mathbf{X}_g \equiv \boldsymbol{\omega}^\sharp(\mathbf{d}p_1) = \frac{\partial}{\partial q^1}$, tedy $\mathbf{X}_{p_1} = \frac{\partial}{\partial q^1}$, což generuje translaci ve směru q^1,

   $$\mathscr{L}_{\frac{\partial}{\partial q^1}} H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{L}_{\mathbf{X}_H} p_1 = 0\,.$$

   Je-li tedy H invariantní vůči *translaci* ve směru q^1, zachovává se příslušná složka *hybnosti* p_1.

2. $g = p_2 q^1 - p_1 q^2$, tedy složka momentu hybnosti. Užitím pravidel (3.46), (3.47)

   $$\mathbf{X}_g = \boldsymbol{\omega}^\sharp(q^1\mathbf{d}p_2 - q^2\mathbf{d}p_1 + p_2\,\mathbf{d}q^1 - p_1\mathbf{d}q^2) = -q^2\frac{\partial}{\partial q^1} + q^1\frac{\partial}{\partial q^2} - p_2\frac{\partial}{\partial p_1} + p_1\frac{\partial}{\partial p_2}\,,$$

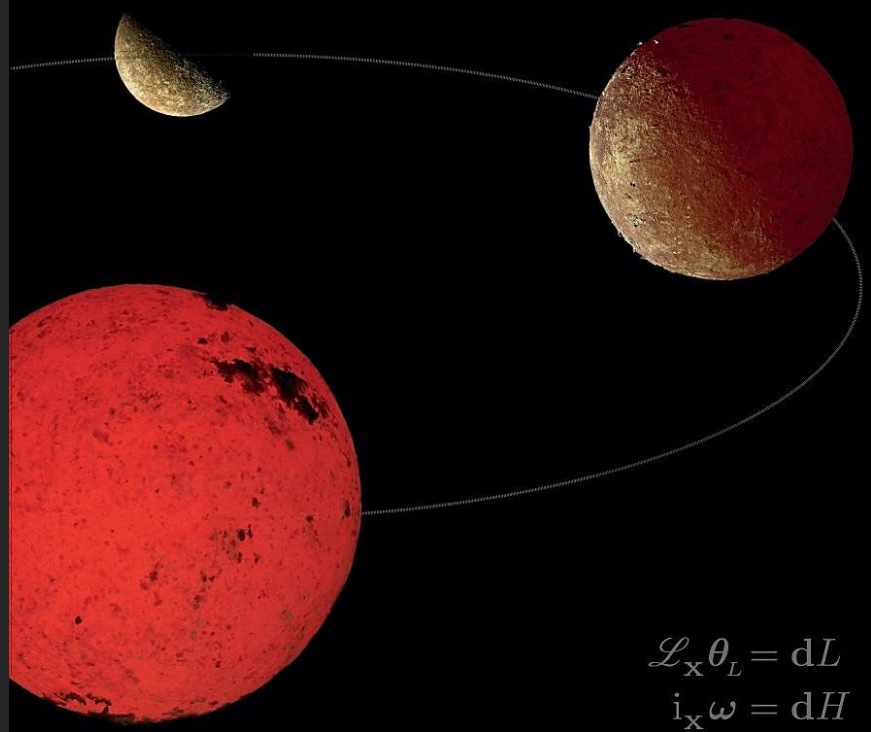
   kde první dva členy generují rotaci v prostoru a druhé dva členy generují odpovídající rotaci v hybnostech – srovnej s výrazem (2.60). Invariance H vůči *rotaci* tedy odpovídá zákonu zachování *momentu hybnosti*.

hamiltonovská verze

TEORETICKÁ MECHANIKA VE TŘECH KNIHÁCH

JIŘÍ PODOLSKÝ

KAROLINUM / MATFYZPRESS



$$\mathscr{L}_{\mathrm{x}}\theta_L = \mathrm{d}L$$
$$\mathrm{i}_{\mathrm{x}}\omega = \mathrm{d}H$$

Dílo je uceleným a navzájem propojeným souborem tří knih, jež jsou moderní učebnicí teoretické mechaniky určenou především pro studenty Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

První kniha obsahuje klasický výklad Lagrangeova a Hamiltonova formalismu pro hmotné body, tuhé těleso i kontinuum, druhá elegantní podobu těchto formalismů v jazyce diferenciální geometrie, jež je oproštěna od souřadnic. Ve třetí knize jsou vzorově vyřešeny pečlivě zvolené typové příklady k procvičení. Zmíněny jsou i návaznosti na kvantovou a relativistickou teorii.

Soubor má přehlednou strukturu, srozumitelnou formu výkladu a bohaté ilustrace.

prof. RNDr. JIŘÍ PODOLSKÝ, CSc., DSc. (* 1963)
Vystudoval Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy, kde od té doby působí, nyní jako profesor na Ústavu teoretické fyziky. Zabývá se obecnou teorií relativity, o gravitaci publikoval více než 100 článků a monografii *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity* (Cambridge, 2009).

Tři desetiletí vede kurz teoretické mechaniky a matematických metod, přednáší o prostoročasech, gravitačních vlnách a historii fyziky. Věnuje se popularizaci vědy, přeložil 20 knih. Působil jako poradce seriálu *Génius: Einstein* (National Geographic, 2017).

V roce 2022 mu byla udělena Nušlova cena za celoživotní přínos v oblasti teoretické fyziky, v roce 2023 získal Cenu Wernera von Siemense v kategorii Nejlepší pedagogický pracovník. Je po něm pojmenována planetka 36174.

www.karolinum.cz
ISBN 978-80-246-5746-2
9 788024 657462