Čím nás mate a čím nás nemate matematika

XXI. seminář o filosofických otázkách matematiky a fyziky,
Velké Meziříčí, 22. 8. 2024

Mirko Rokyta

KMA MFF UK Praha

matfyz

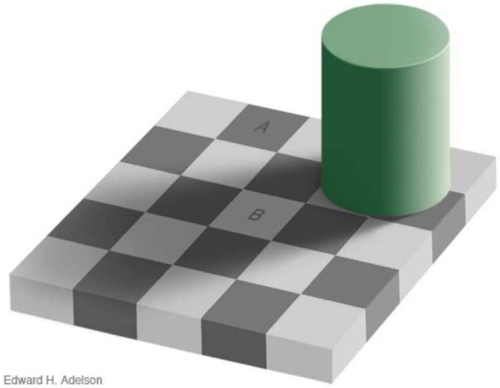
Motto:

Motto:

Když se zdá být něco "jasné", pořád to ještě nemusí být pravda.

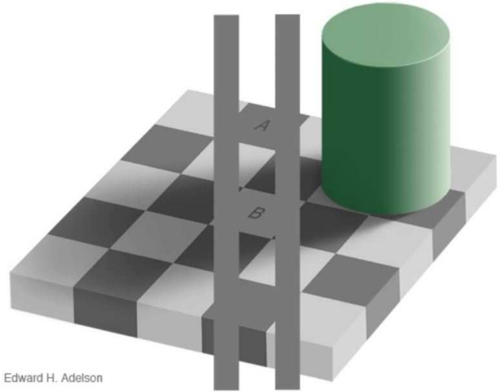
Motto:

Když se zdá být něco "jasné", pořád to ještě nemusí být pravda.



Motto:

Když se zdá být něco "jasné", pořád to ještě nemusí být pravda.



Pár citátů:

Pár citátů:

> Věda dokazuje, intuice objevuje.
>
> Henri Poincaré, matematik a fyzik

Pár citátů:

Věda dokazuje, intuice objevuje.

Henri Poincaré, matematik a fyzik

My všichni musíme stále zpochybňovat svou intuici. Když budeme vždy dělat, co nám říká, budeme opakovat pořád ty samé chyby."

Dan Ariely, profesor psychlogie

Pár citátů:

Věda dokazuje, intuice objevuje.

Henri Poincaré, matematik a fyzik

My všichni musíme stále zpochybňovat svou intuici. Když budeme vždy dělat, co nám říká, budeme opakovat pořád ty samé chyby.”

Dan Ariely, profesor psychlogie

Proti intuici neexistují žádné léky. Jakmile jí jednou máte, už se jí nezbavíte.

Kjell A Nördström, švédsko-norský kostymér

Co nás dnes bude zajímat:

- Problémy, u kterých nás "selský rozum" (případně intuice) pravděpodobně zklame a u kterých naopak (někdy i poměrně jednoduchý) výpočet pomůže.

Co nás dnes bude zajímat:

- Problémy, u kterých nás "selský rozum" (případně intuice) pravděpodobně zklame a u kterých naopak (někdy i poměrně jednoduchý) výpočet pomůže.

. . . aneb:

Co nás dnes bude zajímat:

- Problémy, u kterých nás "selský rozum" (případně intuice) pravděpodobně zklame a u kterých naopak (někdy i poměrně jednoduchý) výpočet pomůže.

. . . aneb:

> Selský rozum patří na pole a ne do matematiky.
>
> M.R.

1. Musí to ve vlaku drncat?

1. Musí to ve vlaku drncat?

. . . aneb . . . co kdyby nebyly mezi kolejemi spáry?

1. Musí to ve vlaku drncat?

. . . aneb . . . co kdyby nebyly mezi kolejemi spáry?

- Mějme dvě ideální neohebné koleje, obě jeden kilometr dlouhé, ležící na zemi, za sebou, a dotýkající se (bez jakékoli mezery mezi nimi).

1. Musí to ve vlaku drncat?

. . . aneb . . . co kdyby nebyly mezi kolejemi spáry?

- Mějme dvě ideální neohebné koleje, obě jeden kilometr dlouhé, ležící na zemi, za sebou, a dotýkající se (bez jakékoli mezery mezi nimi).
- Tyto koleje jsou ukotveny pevně na obou koncích a při eventuálním prodloužení je jim umožněn pouze pohyb nahoru (nikoli do stran).

1. Musí to ve vlaku drncat?

. . . aneb . . . co kdyby nebyly mezi kolejemi spáry?

- Mějme dvě ideální neohebné koleje, obě jeden kilometr dlouhé, ležící na zemi, za sebou, a dotýkající se (bez jakékoli mezery mezi nimi).
- Tyto koleje jsou ukotveny pevně na obou koncích a při eventuálním prodloužení je jim umožněn pouze pohyb nahoru (nikoli do stran).
- Předpokládejme, že každá z obou kolejí se teplem prodlouží o 1 mm.

1. Musí to ve vlaku drncat?

. . . aneb . . . co kdyby nebyly mezi kolejemi spáry?

- Mějme dvě ideální neohebné koleje, obě jeden kilometr dlouhé, ležící na zemi, za sebou, a dotýkající se (bez jakékoli mezery mezi nimi).
- Tyto koleje jsou ukotveny pevně na obou koncích a při eventuálním prodloužení je jim umožněn pouze pohyb nahoru (nikoli do stran).
- Předpokládejme, že každá z obou kolejí se teplem prodlouží o 1 mm.
- O kolik se zvednou tyto koleje v místě společného dotyku?

1. Musí to ve vlaku drncat?

…aneb …co kdyby nebyly mezi kolejemi spáry?

- Mějme dvě ideální neohebné koleje, obě jeden kilometr dlouhé, ležící na zemi, za sebou, a dotýkající se (bez jakékoli mezery mezi nimi).
- Tyto koleje jsou ukotveny pevně na obou koncích a při eventuálním prodloužení je jim umožněn pouze pohyb nahoru (nikoli do stran).
- Předpokládejme, že každá z obou kolejí se teplem prodlouží o 1 mm.
- O kolik se zvednou tyto koleje v místě společného dotyku?

(Viz letní zvedání betonových bloků na dálnici.)

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !**
(znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !**
(znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !**
(znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

- delší odvěsna (kolej na zemi) ..... $a = 1000$ [m].

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !** (znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

- delší odvěsna (kolej na zemi) ..... $a = 1000$ [m].
- přepona (prodloužená kolej) ..... $c = 1000{,}001$ [m].

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !**
(znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

- delší odvěsna (kolej na zemi) ..... $a = 1000$ [m].
- přepona (prodloužená kolej) ..... $c = 1000{,}001$ [m].
- kratší odvěsna (výška zdvihu) ..... $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ [m].

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !**
(znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

- delší odvěsna (kolej na zemi) ..... $a = 1000$ [m].
- přepona (prodloužená kolej) ..... $c = 1000{,}001$ [m].
- kratší odvěsna (výška zdvihu) ..... $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ [m].

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !**
(znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

- delší odvěsna (kolej na zemi) ..... $a = 1000$ [m].
- přepona (prodloužená kolej) ..... $c = 1000{,}001$ [m].
- kratší odvěsna (výška zdvihu) ..... $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ [m].

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)}$$

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !**
(znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

- delší odvěsna (kolej na zemi) ..... $a = 1000$ [m].
- přepona (prodloužená kolej) ..... $c = 1000{,}001$ [m].
- kratší odvěsna (výška zdvihu) ..... $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ [m].

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)} \\ &= \sqrt{0{,}001 \cdot 2000{,}001} \end{aligned}$$

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !**
(znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

- delší odvěsna (kolej na zemi) ..... $a = 1000$ [m].
- přepona (prodloužená kolej) ..... $c = 1000{,}001$ [m].
- kratší odvěsna (výška zdvihu) ..... $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ [m].

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)} \\ &= \sqrt{0{,}001 \cdot 2000{,}001} = \sqrt{2{,}000001} \end{aligned}$$

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !** (znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

- delší odvěsna (kolej na zemi) ..... $a = 1000$ [m].
- přepona (prodloužená kolej) ..... $c = 1000{,}001$ [m].
- kratší odvěsna (výška zdvihu) ..... $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ [m].

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)} \\ &= \sqrt{0{,}001 \cdot 2000{,}001} = \sqrt{2{,}000001} = 1{,}4142\ldots[m] \end{aligned}$$

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !**
(znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

- delší odvěsna (kolej na zemi) ..... $a = 1000$ [m].
- přepona (prodloužená kolej) ..... $c = 1000{,}001$ [m].
- kratší odvěsna (výška zdvihu) ..... $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ [m].

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)} \\ &= \sqrt{0{,}001 \cdot 2000{,}001} = \sqrt{2{,}000001} = 1{,}4142\ldots[m] \end{aligned}$$

Při prodloužení o 1 cm je zdvih **cca 4,47 metru !!**

Pythagoras: koleje se zvednou o **cca 1,41 metru !**
(znovu: při prodloužení kilometrové koleje o jediný milimetr. Nevěříte?)

Pravoúhlý trojúhelník:

- delší odvěsna (kolej na zemi) . . . . . $a = 1000$ [m].
- přepona (prodloužená kolej) . . . . . $c = 1000{,}001$ [m].
- kratší odvěsna (výška zdvihu) . . . . . $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ [m].

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)} \\ &= \sqrt{0{,}001 \cdot 2000{,}001} = \sqrt{2{,}000001} = 1{,}4142\ldots [m] \end{aligned}$$

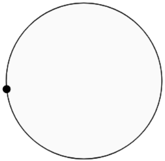
Při prodloužení o 1 cm je zdvih **cca 4,47 metru !!**

Závěr: Spáry mezi kolejemi se vyplatí (a to i častěji než po kilometru...).

2. A jak to bylo dál?

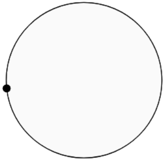
2. A jak to bylo dál? . . . 1, 2, 4, 8, 16, ??

2. A jak to bylo dál? ... 1, 2, 4, 8, 16, ??

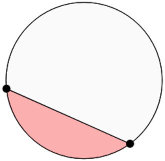


1 bod, 1 část

2. A jak to bylo dál? . . . 1, 2, 4, 8, 16, ??

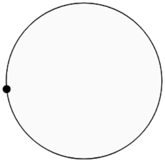


1 bod, 1 část

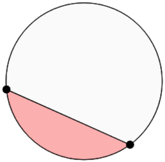


2 body, 2 části

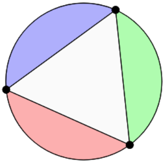
2. A jak to bylo dál? . . . 1, 2, 4, 8, 16, ??



1 bod, 1 část

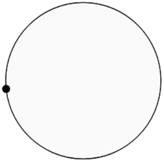


2 body, 2 části

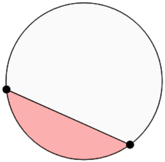


3 body, 4 části

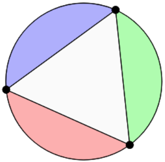
2. A jak to bylo dál? . . . 1, 2, 4, 8, 16, ??



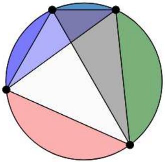
1 bod, 1 část



2 body, 2 části

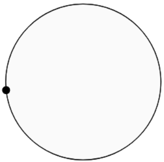


3 body, 4 části

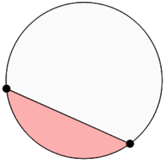


4 body, 8 částí

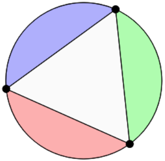
2. A jak to bylo dál? . . . 1, 2, 4, 8, 16, ??



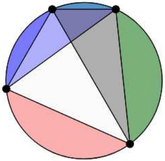
1 bod, 1 část



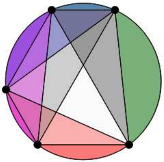
2 body, 2 části



3 body, 4 části

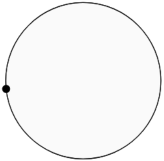


4 body, 8 částí

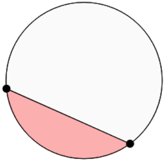


5 bodů, 16 částí

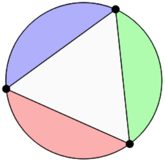
2. A jak to bylo dál? ... 1, 2, 4, 8, 16, ??



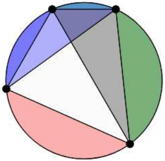
1 bod, 1 část



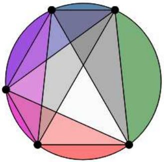
2 body, 2 části



3 body, 4 části



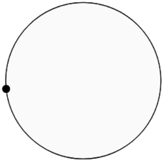
4 body, 8 částí



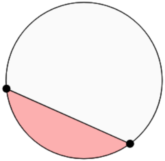
5 bodů, 16 částí

$f(n) = 2^{n-1}$?

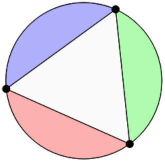
2. A jak to bylo dál? . . . 1, 2, 4, 8, 16, ??



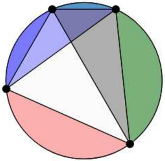
1 bod, 1 část



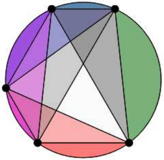
2 body, 2 části



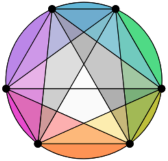
3 body, 4 části



4 body, 8 částí



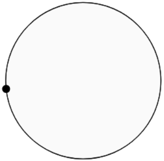
5 bodů, 16 částí



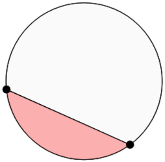
6 bodů, 31 částí

$f(n) \neq 2^{n-1}$

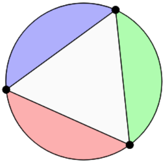
2. A jak to bylo dál? . . . 1, 2, 4, 8, 16, ??



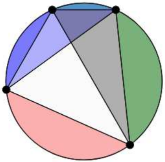
1 bod, 1 část



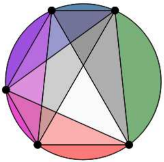
2 body, 2 části



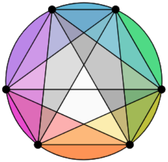
3 body, 4 části



4 body, 8 částí



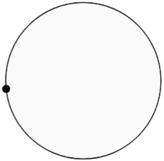
5 bodů, 16 částí



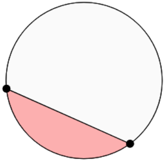
6 bodů, 31 částí

$f(n) \neq 2^{n-1}$ $\quad$ $f(n) = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$

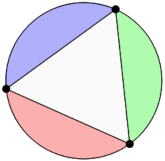
2. A jak to bylo dál? ... 1, 2, 4, 8, 16, ??



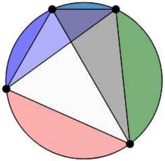
1 bod, 1 část



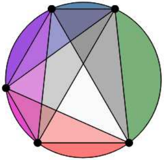
2 body, 2 části



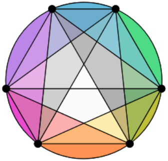
3 body, 4 části



4 body, 8 částí



5 bodů, 16 částí

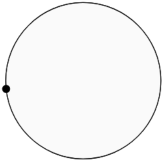


6 bodů, 31 částí

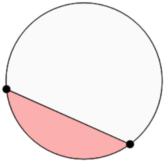
$f(n) \neq 2^{n-1}$

$$f(n)=\frac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-18n+24) = \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$$

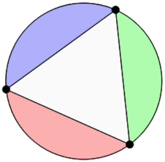
2. A jak to bylo dál? . . . 1, 2, 4, 8, 16, ??



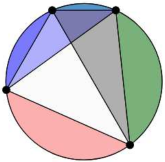
1 bod, 1 část



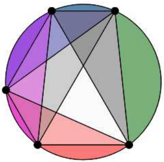
2 body, 2 části



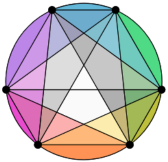
3 body, 4 části



4 body, 8 částí



5 bodů, 16 částí



6 bodů, 31 částí

$f(n) \neq 2^{n-1}$

$$f(n) = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24) = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

$f(n)$: $1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, \ldots$

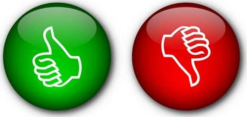
Intermezzo

Častá otázka zní: "Jaké je "správné" pokračovaní dané konečné posloupnosti?"

Intermezzo

Častá otázka zní: "Jaké je "správné" pokračovaní dané konečné posloupnosti?"

> "Correct" isn’t a meaningful adjective to attach to a number sequence. Sequences aren’t classified into correct and incorrect ones. They are all "correct" in an appropriate context.
>
> (*Alon Amit, Quora*)



3. Zklamání nedělních luštitelů

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \ldots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \dots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

Pozor, ono nejde o matematickou úlohu,

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \ldots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

Pozor, ono nejde o matematickou úlohu, jde o úlohu blízkou psychologii:

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \dots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

Pozor, ono nejde o matematickou úlohu, jde o úlohu blízkou psychologii: Přijď na to, co měl autor úlohy na mysli

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \ldots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

Pozor, ono nejde o matematickou úlohu, jde o úlohu blízkou psychologii: Přijď na to, co měl autor úlohy na mysli a pokračuj v jeho duchu.

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \ldots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

Pozor, ono nejde o matematickou úlohu, jde o úlohu blízkou psychologii: Přijď na to, co měl autor úlohy na mysli a pokračuj v jeho duchu.
Pak je výsledek nejpravděpodobněji 5 a předpis je $a_n = n$.

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \ldots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

Pozor, ono nejde o matematickou úlohu, jde o úlohu blízkou psychologii: Přijď na to, co měl autor úlohy na mysli a pokračuj v jeho duchu.
Pak je výsledek nejpravděpodobněji 5 a předpis je $a_n = n$.

Ale:

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \ldots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

Pozor, ono nejde o matematickou úlohu, jde o úlohu blízkou psychologii: Přijď na to, co měl autor úlohy na mysli a pokračuj v jeho duchu.
Pak je výsledek nejpravděpodobněji 5 a předpis je $a_n = n$.

Ale:

$$a_n = n$$

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \ldots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

Pozor, ono nejde o matematickou úlohu, jde o úlohu blízkou psychologii: Přijď na to, co měl autor úlohy na mysli a pokračuj v jeho duchu.
Pak je výsledek nejpravděpodobněji 5 a předpis je $a_n = n$.

Ale:

$$\boxed{a_n = n + (2024 - n)}$$

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \dots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

Pozor, ono nejde o matematickou úlohu, jde o úlohu blízkou psychologii: Přijď na to, co měl autor úlohy na mysli a pokračuj v jeho duchu.
Pak je výsledek nejpravděpodobněji 5 a předpis je $a_n = n$.

Ale:

$$\boxed{a_n = n + (2024 - n)\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}}$$

3. Zklamání nedělních luštitelů

Častá úloha z novin: jaký je pátý člen posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \dots ?$$

Odpověď matematika: jakýkoli, třeba 2024.

Pozor, ono nejde o matematickou úlohu, jde o úlohu blízkou psychologii: Přijď na to, co měl autor úlohy na mysli a pokračuj v jeho duchu.
Pak je výsledek nejpravděpodobněji 5 a předpis je $a_n = n$.

Ale:

$$\boxed{a_n = n + (2024 - n)\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

4. Oslavíme to spolu?

4. Oslavíme to spolu?

V místnosti je n lidí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva z nich mají narozeniny ve stejný den?

4. Oslavíme to spolu?

V místnosti je *n* lidí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva z nich mají narozeniny ve stejný den?

Pozorování: Když jich v místnosti bude 367, tak 100 %

4. Oslavíme to spolu?

V místnosti je *n* lidí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva z nich mají narozeniny ve stejný den?

Pozorování: Když jich v místnosti bude 367, tak 100 % (tzv. "Dirichletův princip").

4. Oslavíme to spolu?

V místnosti je n lidí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva z nich mají narozeniny ve stejný den?

Pozorování: Když jich v místnosti bude 367, tak 100 % (tzv. "Dirichletův princip").

Když jich bude méně (třeba 50), nemusí to vždy nastat, jde pouze o určitou **pravděpodobnost**, že se tak stane.

4. Oslavíme to spolu?

V místnosti je *n* lidí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva z nich mají narozeniny ve stejný den?

Pozorování: Když jich v místnosti bude 367, tak 100 % (tzv. "Dirichletův princip").

Když jich bude méně (třeba 50), nemusí to vždy nastat, jde pouze o určitou **pravděpodobnost**, že se tak stane.

Pravděpodobnost, že nějaký jev nastane:

4. Oslavíme to spolu?

V místnosti je n lidí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva z nich mají narozeniny ve stejný den?

Pozorování: Když jich v místnosti bude 367, tak 100 % (tzv. "Dirichletův princip").

Když jich bude méně (třeba 50), nemusí to vždy nastat, jde pouze o určitou **pravděpodobnost**, že se tak stane.

Pravděpodobnost, že nějaký jev nastane:

$$p = \frac{\text{počet možností, při kterých jev nastane}}{\text{počet všech možností, které přicházejí v úvahu}}.$$

4. Oslavíme to spolu?

V místnosti je *n* lidí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva z nich mají narozeniny ve stejný den?

Pozorování: Když jich v místnosti bude 367, tak 100 % (tzv. "Dirichletův princip").

Když jich bude méně (třeba 50), nemusí to vždy nastat, jde pouze o určitou **pravděpodobnost**, že se tak stane.

Pravděpodobnost, že nějaký jev nastane:

$$p = \frac{\text{počet možností, při kterých jev nastane}}{\text{počet všech možností, které přicházejí v úvahu}}.$$

Zkuste odhadnout příslušnou pravděpodobnost pro lidi zde v místnosti.

Pro jednoduchost: rok má 365 dnů. Lidem, narozeným, 29. února, se omlouvám.

Pro jednoduchost: rok má 365 dnů. Lidem, narozeným, 29. února, se omlouvám.

- V místnosti je jeden člověk a vstoupí do ní druhý.

Pro jednoduchost: rok má 365 dnů. Lidem, narozeným, 29. února, se omlouvám.

- V místnosti je jeden člověk a vstoupí do ní druhý. Pravděpodobnost, že **nemá** narozeniny ve stejný den jako ten první, je $\frac{364}{365}$.

Pro jednoduchost: rok má 365 dnů. Lidem, narozeným, 29. února, se omlouvám.

- V místnosti je jeden člověk a vstoupí do ní druhý. Pravděpodobnost, že **nemá** narozeniny ve stejný den jako ten první, je $\frac{364}{365}$. Tedy praděpodobnost, že **má** narozeniny ve stejný den, je $1 - \frac{364}{365} \approx 0.00274$, tj. 0.27%.

Pro jednoduchost: rok má 365 dnů. Lidem, narozeným, 29. února, se omlouvám.

- V místnosti je jeden člověk a vstoupí do ní druhý. Pravděpodobnost, že **nemá** narozeniny ve stejný den jako ten první, je $\frac{364}{365}$. Tedy praděpodobnost, že **má** narozeniny ve stejný den, je $1 - \frac{364}{365} \approx 0.00274$, tj. 0.27%.
- Do místnosti vstoupí třetí člověk.

Pro jednoduchost: rok má 365 dnů. Lidem, narozeným, 29. února, se omlouvám.

- V místnosti je jeden člověk a vstoupí do ní druhý. Pravděpodobnost, že **nemá** narozeniny ve stejný den jako ten první, je $\frac{364}{365}$. Tedy praděpodobnost, že **má** narozeniny ve stejný den, je $1 - \frac{364}{365} \approx 0.00274$, tj. 0.27%.
- Do místnosti vstoupí třetí člověk. Pravděpodobnost, že všichni tři **nemají** narozeniny ve stejný den, je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$. (Proč?)

Pro jednoduchost: rok má 365 dnů. Lidem, narozeným, 29. února, se omlouvám.

- V místnosti je jeden člověk a vstoupí do ní druhý. Pravděpodobnost, že **nemá** narozeniny ve stejný den jako ten první, je $\frac{364}{365}$. Tedy praděpodobnost, že **má** narozeniny ve stejný den, je $1 - \frac{364}{365} \approx 0.00274$, tj. 0.27%.
- Do místnosti vstoupí třetí člověk. Pravděpodobnost, že všichni tři **nemají** narozeniny ve stejný den, je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$. (Proč?) Tedy že aspoň někteří dva z nich **mají** narozeniny ve stejný den, je $1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \approx 0.008204$, tj. 0.82%.

Pro jednoduchost: rok má 365 dnů. Lidem, narozeným, 29. února, se omlouvám.

- V místnosti je jeden člověk a vstoupí do ní druhý. Pravděpodobnost, že **nemá** narozeniny ve stejný den jako ten první, je $\frac{364}{365}$. Tedy praděpodobnost, že **má** narozeniny ve stejný den, je $1 - \frac{364}{365} \approx 0.00274$, tj. 0.27%.
- Do místnosti vstoupí třetí člověk. Pravděpodobnost, že všichni tři **nemají** narozeniny ve stejný den, je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$. (Proč?) Tedy že aspoň někteří dva z nich **mají** narozeniny ve stejný den, je $1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$ ≈ 0.008204, tj. 0.82%.
- Podobně pravděpodobnost, že například ve skupině pěti lidí existují dva s narozeninami ve stejný den, je

$$1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365}$$

Pro jednoduchost: rok má 365 dnů. Lidem, narozeným, 29. února, se omlouvám.

- V místnosti je jeden člověk a vstoupí do ní druhý. Pravděpodobnost, že **nemá** narozeniny ve stejný den jako ten první, je $\frac{364}{365}$. Tedy praděpodobnost, že **má** narozeniny ve stejný den, je $1 - \frac{364}{365} \approx 0.00274$, tj. 0.27%.
- Do místnosti vstoupí třetí člověk. Pravděpodobnost, že všichni tři **nemají** narozeniny ve stejný den, je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$. (Proč?) Tedy že aspoň někteří dva z nich **mají** narozeniny ve stejný den, je $1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$ ≈ 0.008204, tj. 0.82%.
- Podobně pravděpodobnost, že například ve skupině pěti lidí existují dva s narozeninami ve stejný den, je

$$1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} \approx 0.02713, \text{ tj. } 2.71\%.$$

Co říká vaše intuice? Tipněte si, při kolika lidech

- je ona pravděpodobnost větší než 50 %;

Co říká vaše intuice? Tipněte si, při kolika lidech

- je ona pravděpodobnost větší než 50 %;
- je ona pravděpodobnost větší než 80 %;

Co říká vaše intuice? Tipněte si, při kolika lidech

- je ona pravděpodobnost větší než 50 %;
- je ona pravděpodobnost větší než 80 %;
- je ona pravděpodobnost větší než 90 %;

Co říká vaše intuice? Tipněte si, při kolika lidech

- je ona pravděpodobnost větší než 50 %;
- je ona pravděpodobnost větší než 80 %;
- je ona pravděpodobnost větší než 90 %;

Připomeneme: jistota (v nepřestupném roce) nastává při 366 lidech.

Co říká vaše intuice? Tipněte si, při kolika lidech

- je ona pravděpodobnost větší než 50 %; 23
- je ona pravděpodobnost větší než 80 %;
- je ona pravděpodobnost větší než 90 %;

Připomeneme: jistota (v nepřestupném roce) nastává při 366 lidech.

Co říká vaše intuice? Tipněte si, při kolika lidech

- je ona pravděpodobnost větší než 50 %; 23
- je ona pravděpodobnost větší než 80 %; 35
- je ona pravděpodobnost větší než 90 %;

Připomeneme: jistota (v nepřestupném roce) nastává při 366 lidech.

Co říká vaše intuice? Tipněte si, při kolika lidech

- je ona pravděpodobnost větší než 50 %; 23
- je ona pravděpodobnost větší než 80 %; 35
- je ona pravděpodobnost větší než 90 %; 41

Připomeneme: jistota (v nepřestupném roce) nastává při 366 lidech.

Co říká vaše intuice? Tipněte si, při kolika lidech

- je ona pravděpodobnost větší než 50 %; 23
- je ona pravděpodobnost větší než 80 %; 35
- je ona pravděpodobnost větší než 90 %; 41

Připomeneme: jistota (v nepřestupném roce) nastává při 366 lidech.

Je to překvapivé?

Počet lidí v místnosti	Pravděpodobnost
10	11.69 %

Počet lidí v místnosti	Pravděpodobnost
10	11.69 %
20	41.14 %

Počet lidí v místnosti	Pravděpodobnost
10	11.69 %
20	41.14 %
30	70.63 %

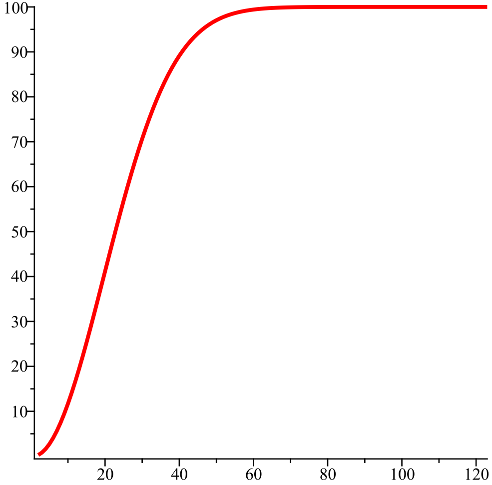
Počet lidí v místnosti	Pravděpodobnost
10	11.69 %
20	41.14 %
30	70.63 %
41	90.31 %

Počet lidí v místnosti	Pravděpodobnost
10	11.69 %
20	41.14 %
30	70.63 %
41	90.31 %
57	99.01 %

Počet lidí v místnosti	Pravděpodobnost
10	11.69 %
20	41.14 %
30	70.63 %
41	90.31 %
57	99.01 %
80	99.99 %

Výsledky: [počet osob, pravděpodobnost v procentech]

[2, 0.27397260] [3, 0.82041658] [4, 1.63559123] [5, 2.71355734] [6, 4.04624833] [7, 5.62357027]
[8, 7.43352921] [9, 9.46238337] [10, 11.69481775] [11, 14.11413781] [12, 16.70247885] [13, 19.44102748]
[14, 22.31025115] [15, 25.29013192] [16, 28.36040047] [17, 31.50076647] [18, 34.69114173] [19, 37.91185255]
[20, 41.14383830] [21, 44.36883345] [22, 47.56953071] [23, 50.72972337] [24, 53.83442573] [25, 56.86997033]
[26, 59.82408195] [27, 62.68592816] [28, 65.44614718] [29, 68.09685370] [30, 70.63162422] [31, 73.04546333]
[32, 75.33475275] [33, 77.49718539] [34, 79.53168644] [35, 81.43832387] [36, 83.21821062] [37, 84.87340081]
[38, 86.40678210] [39, 87.82196643] [40, 89.12318098] [41, 90.31516114] [42, 91.40304715] [43, 92.39228556]
[44, 93.28853685] [45, 94.09758994] [46, 94.82528433] [47, 95.47744028] [48, 96.05979728] [49, 96.57796093]
[50, 97.03735796] [51, 97.44319933] [52, 97.80045093] [53, 98.11381135] [54, 98.38769628] [55, 98.62622888]
[56, 98.83323549] [57, 99.01224593] [58, 99.16649794] [59, 99.29894484] [60, 99.41226609] [61, 99.50887988]
[62, 99.59095749] [63, 99.66043868] [64, 99.71904790] [65, 99.76831073] [66, 99.80957046] [67, 99.84400430]
[68, 99.87263913] [69, 99.89636663] [70, 99.91595760] [71, 99.93207532] [72, 99.94528806] [73, 99.95608056]
[74, 99.96486444] [75, 99.97198782] [76, 99.97774375] [77, 99.98237792] [78, 99.98609546] [79, 99.98906684]
[80, 99.99143319] [81, 99.99331085] [82, 99.99479529] [83, 99.99596457] [84, 99.99688221] [85, 99.99759973]
[86, 99.99815870] [87, 99.99859254] [88, 99.99892802] [89, 99.99918647] [90, 99.99938484] [91, 99.99953652]
[92, 99.99965207] [93, 99.99973977] [94, 99.99980607] [95, 99.99985602] [96, 99.99989349] [97, 99.99992151]
[98, 99.99994237] [99, 99.99995784] [100, 99.99996928] [101, 99.99997769] [102, 99.99998387]
[103, 99.99998837] [104, 99.99999166] [105, 99.99999403] [106, 99.99999575] [107, 99.99999698]
[108, 99.99999787] [109, 99.99999850] [110, 99.99999895] [111, 99.99999926] [112, 99.99999949]
[113, 99.99999965] [114, 99.99999976] [115, 99.99999983] [116, 99.99999988] [117, 99.99999992]
[118, 99.99999995] [119, 99.99999996] [120, 99.99999998] [121, 99.99999998] [122, 99.99999999]



Pravděpodobnost stejných narozenin pro n osob.

5. Conwayovi vojáci

5. Conwayovi vojáci

- Čtverečkovaný papír (libovolně velkého rozměru) je rozdělen vodorovnou čárou (bariérou) na dvě části.

5. Conwayovi vojáci

- Čtverečkovaný papír (libovolně velkého rozměru) je rozdělen vodorovnou čárou (bariérou) na dvě části.
- Do čtverečků ve spodní části (pod bariérou) lze umístit jakékoli konečné množství figurek (kamenů), do horní části se nesmí umístit žádný.

5. Conwayovi vojáci

- Čtverečkovaný papír (libovolně velkého rozměru) je rozdělen vodorovnou čárou (bariérou) na dvě části.
- Do čtverečků ve spodní části (pod bariérou) lze umístit jakékoli konečné množství figurek (kamenů), do horní části se nesmí umístit žádný.
- Kameny ve spodní části se mohou vzájemně přeskakovat ve vodorovném a svislém směru, doprava i doleva, nahoru i dolů, je-li za přeskakovaným kamenem místo.

5. Conwayovi vojáci

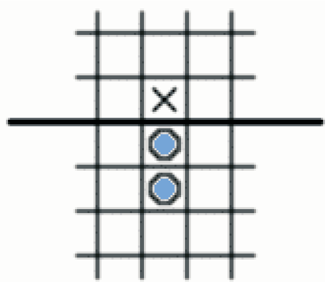
- Čtverečkovaný papír (libovolně velkého rozměru) je rozdělen vodorovnou čárou (bariérou) na dvě části.
- Do čtverečků ve spodní části (pod bariérou) lze umístit jakékoli konečné množství figurek (kamenů), do horní části se nesmí umístit žádný.
- Kameny ve spodní části se mohou vzájemně přeskakovat ve vodorovném a svislém směru, doprava i doleva, nahoru i dolů, je-li za přeskakovaným kamenem místo. Přeskočený kámen je nutno odstranit (jako ve hře Dáma.)

5. Conwayovi vojáci

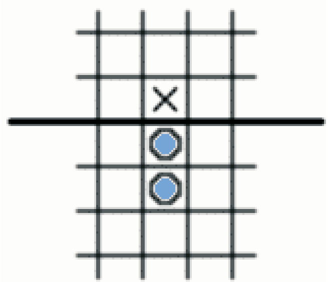
- Čtverečkovaný papír (libovolně velkého rozměru) je rozdělen vodorovnou čárou (bariérou) na dvě části.
- Do čtverečků ve spodní části (pod bariérou) lze umístit jakékoli konečné množství figurek (kamenů), do horní části se nesmí umístit žádný.
- Kameny ve spodní části se mohou vzájemně přeskakovat ve vodorovném a svislém směru, doprava i doleva, nahoru i dolů, je-li za přeskakovaným kamenem místo. Přeskočený kámen je nutno odstranit (jako ve hře Dáma.)

Otázka: Do které horní řady (tj. kam nejdál) za bariéru je možno takto doskákat a pomocí jaké konfigurace kamenů ve spodní části?

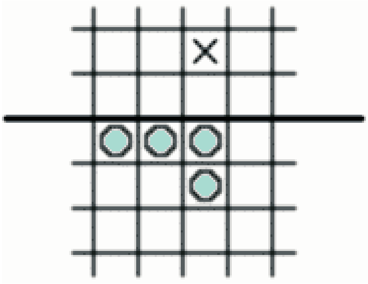
Konfigurace pro skok do první řady za bariéru je triviální.



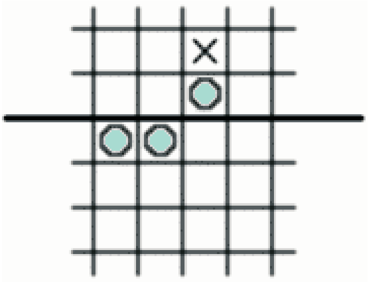
Konfigurace pro skok do první řady za bariéru je triviální.



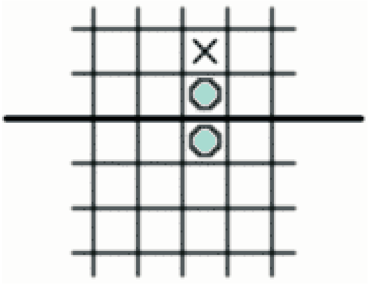
Uměli byste najít konfiguraci, pomocí které lze doskákat do druhé řady?



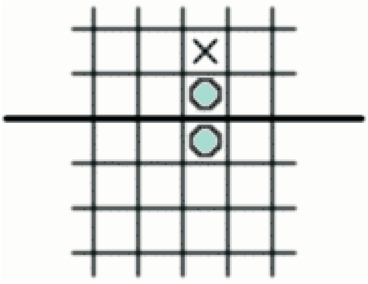
To je ona. Věříte?



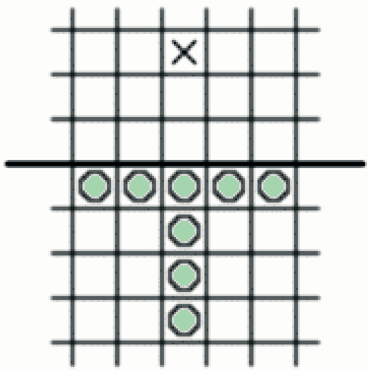
Přeskočený kámen je potřeba odstranit.

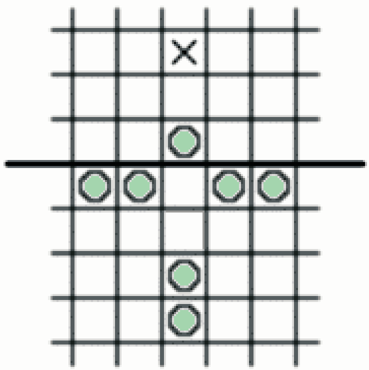


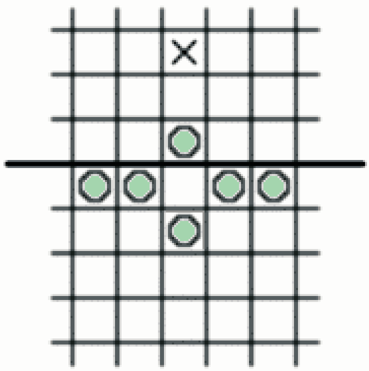
. . . a poslední skok už je jasný.

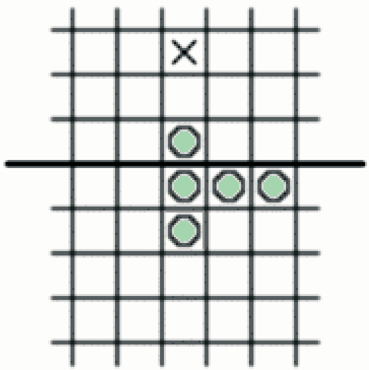


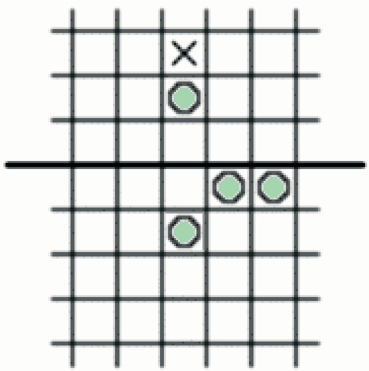
. . . a poslední skok už je jasný. A co třetí řada?

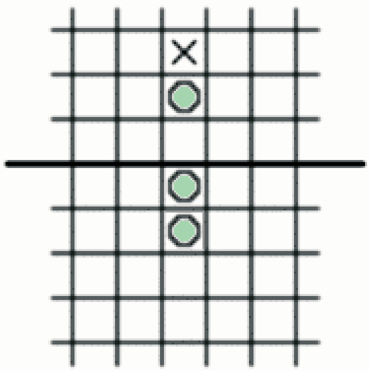


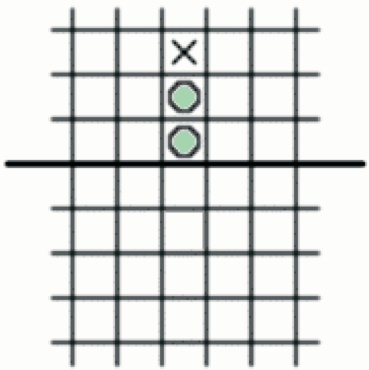












Krátké shrnutí:

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.

- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.

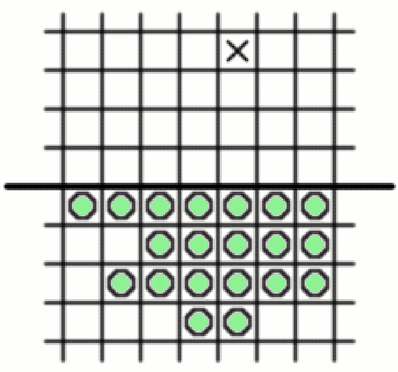
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?
- A kolik kamenů je k tomu minimálně potřeba?

Krátké shrnutí:

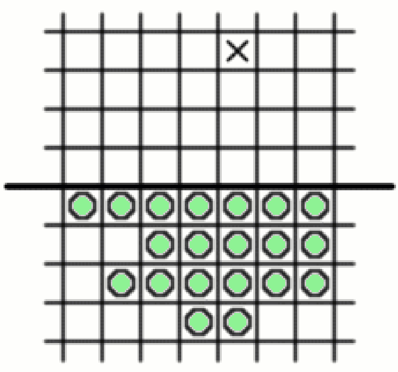
- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.

- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?
- A kolik kamenů je k tomu minimálně potřeba?

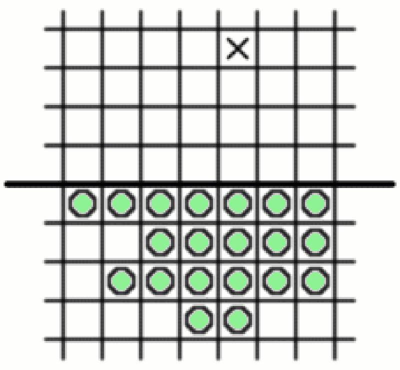
Překvapení č. 1: Je potřeba alespoň 20 kamenů.



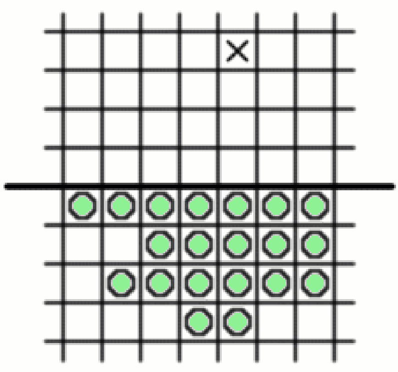
Toto je jedna z možností.



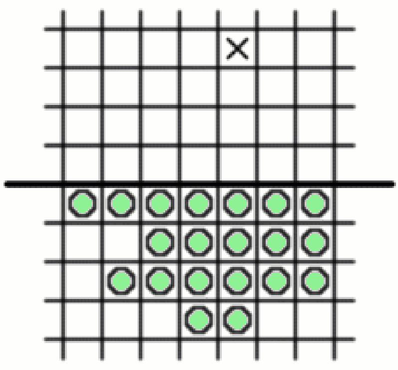
Toto je jedna z možností. (Zkuste si ve volném čase zaskákat.)



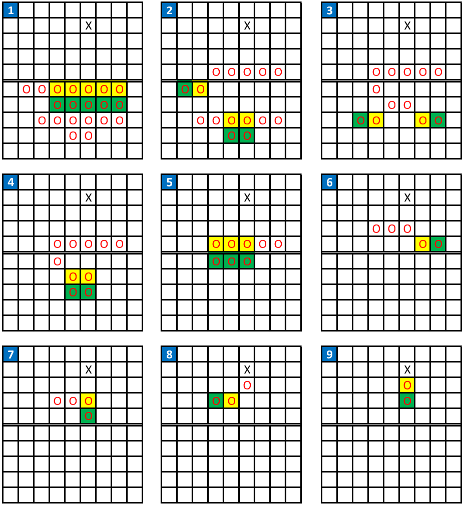
Toto je jedna z možností. (Zkuste si ve volném čase zaskákat.) (Případně se pokuste najít konfiguraci s méně než 20 kameny.



Toto je jedna z možností. (Zkuste si ve volném čase zaskákat.) (Případně se pokuste najít konfiguraci s méně než 20 kameny... nebo dokázat, že žádná taková není.)



Toto je jedna z možností. (Zkuste si ve volném čase zaskákat.) (Případně se pokuste najít konfiguraci s méně než 20 kameny... nebo dokázat, že žádná taková není.)
Na příštím slajdu je návod k tomu, jak skákat, který teď rychle přeskočím.



Skáčeme do čtvrté řady - zelení skáčou přes žluté

Zásadní otázka:

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) NELZE doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) NELZE doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

Umíme to dokázat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) NELZE doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

Umíme to dokázat?
ANO. Umíme dokázat, že v tomto případě to NELZE.

Náznak Conwayova důkazu

První krok: "obodování" polí zatím neznámými hodnotami s chytrou strukturou.

Náznak Conwayova důkazu

První krok: "obodování" polí zatím neznámými hodnotami s chytrou strukturou.
Chytrost tohoto obodování se projeví až později.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & \boxed{1} & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & x^7 & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & \boxed{1} & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & x^7 & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Hlavní myšlenkou důkazu je sečíst na začátku hodnoty všech polí v dolní části roviny, na kterých leží kámen

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & \boxed{1} & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & x^7 & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Hlavní myšlenkou důkazu je sečíst na začátku hodnoty všech polí v dolní části roviny, na kterých leží kámen a sledovat, co se s tímto součtem děje v průběhu skákání.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & \boxed{1} & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & x^7 & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & \boxed{1} & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & x^7 & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Vpravo je nekonečný součet. Může mít konečnou hodnotu?

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x.
Conway ukázal, že existuje takové $x \in (0, 1)$, pro které

- Je nekonečný součet vpravo roven 1, a tedy $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x.
Conway ukázal, že existuje takové $x \in (0, 1)$, pro které

- Je nekonečný součet vpravo roven 1, a tedy $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **po celou dobu skákání zůstává** $S < 1$.

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x.
Conway ukázal, že existuje takové $x \in (0, 1)$, pro které

- Je nekonečný součet vpravo roven 1, a tedy $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **po celou dobu skákání zůstává** $S < 1$.

Ale:
Pokud by bylo možno doskákat do páté řady, ležel by po dosažení tohoto cíle poslední kámen na poli s hodnotou 1, tedy by v té chvíli platilo $S = 1$, což ale není možné.

Vše je otázkou rafinované volby konkrétní hodnoty x. Conway ukázal, že existuje takové $x \in (0, 1)$, pro které

- Je nekonečný součet vpravo roven 1, a tedy $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **po celou dobu skákání zůstává** $S < 1$.

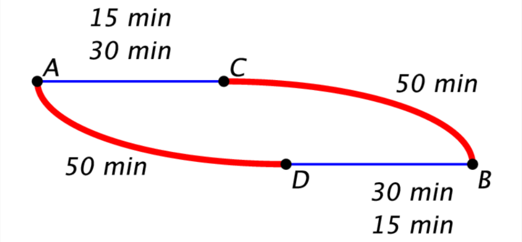
Ale:
Pokud by bylo možno doskákat do páté řady, ležel by po dosažení tohoto cíle poslední kámen na poli s hodnotou 1, tedy by v té chvíli platilo $S = 1$, což ale není možné. (Bylo dosaženo tzv. sporu.)

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & \boxed{1} & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & x^7 & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

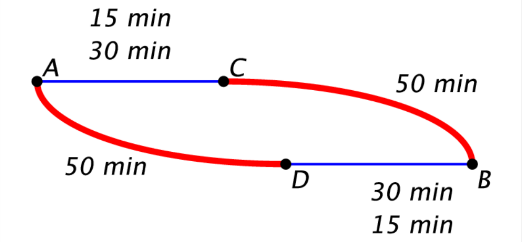
(Ani ranní ptáče nedoskáče dál, než do čtvrté řady.)

6. Drobné odlehčení na závěr: cesta z bodu A do bodu B

6. Drobné odlehčení na závěr: cesta z bodu A do bodu B

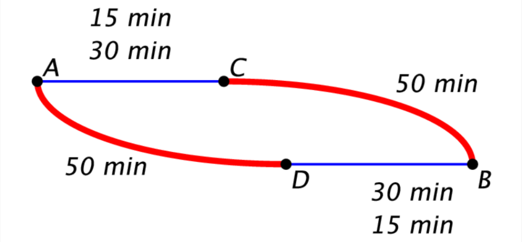


6. Drobné odlehčení na závěr: cesta z bodu A do bodu B



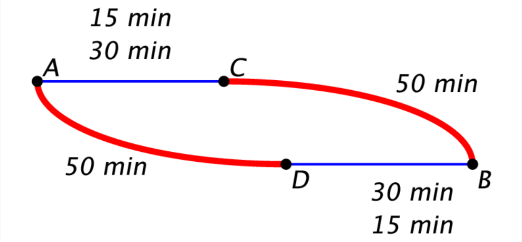
$A \to C$ a $D \to B$: 30 minut při hustém provozu,

6. Drobné odlehčení na závěr: cesta z bodu A do bodu B



$A \to C$ a $D \to B$: 30 minut při hustém provozu,
$A \to C$ a $D \to B$: 15 minut při řídkém provozu.

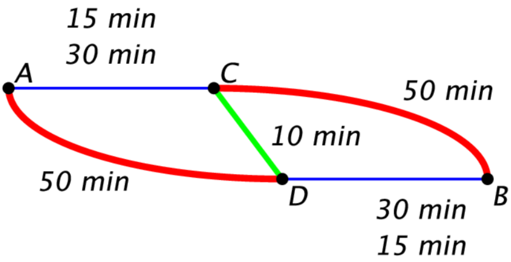
6. Drobné odlehčení na závěr: cesta z bodu A do bodu B



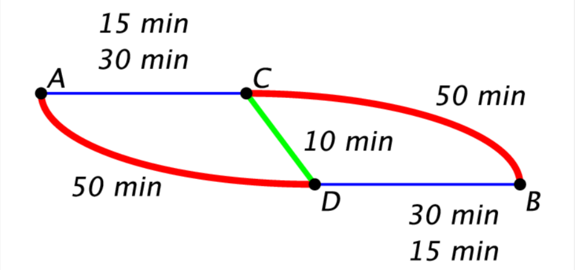
$A \to C$ a $D \to B$: 30 minut při hustém provozu,
$A \to C$ a $D \to B$: 15 minut při řídkém provozu.

Statisticky pojede polovina řidičů horní a polovina dolní cestou a všichni jsou na cestě 15+50=65 minut.

6. Drobné odlehčení na závěr: cesta z bodu A do bodu B

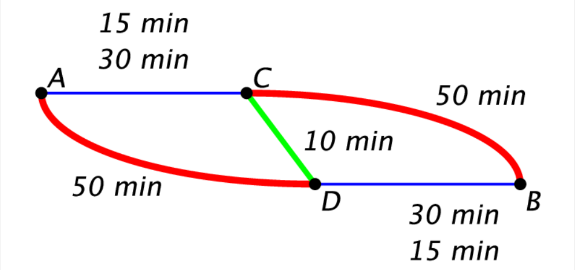


6. Drobné odlehčení na závěr: cesta z bodu A do bodu B



$A \to C$ a $D \to B$: 30 minut při hustém provozu,
$A \to C$ a $D \to B$: 15 minut při řídkém provozu.

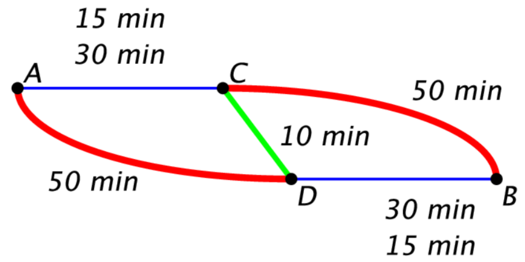
6. Drobné odlehčení na závěr: cesta z bodu A do bodu B



$A \to C$ a $D \to B$: 30 minut při hustém provozu,
$A \to C$ a $D \to B$: 15 minut při řídkém provozu.

Statisticky jedou všichni po nové trase $A \to C \to D \to B$

6. Drobné odlehčení na závěr: cesta z bodu A do bodu B



$A \to C$ a $D \to B$: 30 minut při hustém provozu,
$A \to C$ a $D \to B$: 15 minut při řídkém provozu.

Statisticky jedou všichni po nové trase $A \to C \to D \to B$ a všichni jsou na cestě 30+10+30=70 minut.

Z toho plyne, že ani silnice by se neměly stavět jen s pomocí selského rozumu. A tímto konstatováním se můžeme rozloučit.

Mirko Rokyta

mirko.rokyta@matfyz.cuni.cz

7. Appendix: Conwayúv důkaz – dokončení

Víme:

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

7. Appendix: Conwayúv důkaz – dokončení

Víme:

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

a pokračujeme: ...

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0,1)$.

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0,1)$. Potom

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618 \in (0, 1)$. Potom

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0,1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5{+}x^6{+}\dots) + 2(x^6{+}x^7{+}\dots) + 2(x^7{+}x^8{+}\dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \end{aligned}$$

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0,1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5+x^6+\dots) + 2(x^6+x^7+\dots) + 2(x^7+x^8+\dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \end{aligned}$$

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0,1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5+x^6+\dots) + 2(x^6+x^7+\dots) + 2(x^7+x^8+\dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots \end{aligned}$$

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0,1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5+x^6+\dots) + 2(x^6+x^7+\dots) + 2(x^7+x^8+\dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots \\ &= \frac{2x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots - \frac{x^5}{1-x} \end{aligned}$$

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0,1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5+x^6+\dots) + 2(x^6+x^7+\dots) + 2(x^7+x^8+\dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots \\ &= \frac{\color{red}{2}x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots - \color{red}{\frac{x^5}{1-x}} \\ &= \frac{2x^5}{1-x}\left(1 + x + x^2 + \dots\right) - \frac{x^5}{1-x} \end{aligned}$$

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618 \in (0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5+x^6+\dots) + 2(x^6+x^7+\dots) + 2(x^7+x^8+\dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots \\ &= \frac{2x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots - \frac{x^5}{1-x} \\ &= \frac{2x^5}{1-x}\left(1 + x + x^2 + \dots\right) - \frac{x^5}{1-x} \\ &= \frac{2x^5}{(1-x)^2} - \frac{x^5(1-x)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0,1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5+x^6+\dots) + 2(x^6+x^7+\dots) + 2(x^7+x^8+\dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots \\ &= \frac{2x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots - \frac{x^5}{1-x} \\ &= \frac{2x^5}{1-x}\left(1 + x + x^2 + \dots\right) - \frac{x^5}{1-x} \\ &= \frac{2x^5}{(1-x)^2} - \frac{x^5(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x^6+x^5}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1-x)^2}$$

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1-x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4}$$

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1-x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4} = x^2 + x$$

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1-x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4} = x^2 + x = 1.$$

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S \;<\; \frac{x^6 + x^5}{(1-x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4} = x^2 + x = 1.$$

Tím je splněn první cíl:

- Existuje taková volba $x \in (0,1)$, že $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1-x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4} = x^2 + x = 1.$$

Tím je splněn první cíl:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- *Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S* **nezvětší**, *tedy* **vždy je** $S < 1$.

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S \quad < \quad \frac{x^6 + x^5}{(1-x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4} = x^2 + x = 1.$$

Zbývá přesvědčit se o tom, že platí i:

- *Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.*
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **vždy je** $S < 1$.

Změny v bodové hodnotě:

Změny v bodové hodnotě:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & \boxed{x^6} & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & \boxed{x^7} & x^6 & \boxed{x^5} & \boxed{x^6} & \boxed{x^7} & \dots \\
\dots & \boxed{x^8} & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "**do** středu":

Změny v bodové hodnotě:

...	x^2	x	1	x	x^2	...
...	x^3	x^2	x	x^2	x^3	...
...	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	...
...	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	...
...	$\boxed{x^6}$	x^5	x^4	x^5	x^6	...
...	$\boxed{x^7}$	x^6	$\boxed{x^5}$	$\boxed{x^6}$	$\boxed{x^7}$	...
...	$\boxed{x^8}$	x^7	x^6	x^7	x^8	...
...	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	...
...	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	...

Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "**do** středu":

- před skokem: $x^{n+2} + x^{n+1}$

Změny v bodové hodnotě:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & \boxed{x^6} & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & \boxed{x^7} & x^6 & \boxed{x^5} & \boxed{x^6} & \boxed{x^7} & \dots \\
\dots & \boxed{x^8} & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "**do** středu":

- před skokem: $x^{n+2} + x^{n+1}$ po skoku: x^n

Změny v bodové hodnotě:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & \boxed{x^6} & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & \boxed{x^7} & x^6 & \boxed{x^5} & \boxed{x^6} & \boxed{x^7} & \dots \\
\dots & \boxed{x^8} & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "**do** středu":

- před skokem: $x^{n+2} + x^{n+1}$ po skoku: x^n
- změna: $+x^n - x^{n+1} - x^{n+2}$

Změny v bodové hodnotě:

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & \boxed{x^6} & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & \boxed{x^7} & x^6 & \boxed{x^5} & \boxed{x^6} & \boxed{x^7} & \dots \\
\dots & \boxed{x^8} & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}$$

Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "**do** středu":

- před skokem: $x^{n+2} + x^{n+1}$ po skoku: x^n
- změna: $+x^n - x^{n+1} - x^{n+2} = x^n \underbrace{(1 - x - x^2)}_{=0}$

Změny v bodové hodnotě:

...	x^2	x	1	x	x^2	...
...	x^3	x^2	x	x^2	x^3	...
...	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	...
...	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	...
...	$\boxed{x^6}$	x^5	x^4	x^5	x^6	...
...	$\boxed{x^7}$	x^6	$\boxed{x^5}$	$\boxed{x^6}$	$\boxed{x^7}$	...
...	$\boxed{x^8}$	x^7	x^6	x^7	x^8	...
...	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	...
...	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	...

Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "**do** středu":

- před skokem: $x^{n+2} + x^{n+1}$ po skoku: x^n
- změna: $+x^n - x^{n+1} - x^{n+2} = x^n \underbrace{\left(1 - x - x^2\right)}_{=0} = 0.$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & \boxed{x^5} & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & \boxed{x^6} & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & \boxed{x^7} & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & \boxed{x^9} & \boxed{x^8} & \boxed{x^7} & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok vodorovný, směrem "**od** středu", nebo skok dolů:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & \boxed{x^5} & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & \boxed{x^6} & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & \boxed{x^7} & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & \boxed{x^9} & \boxed{x^8} & \boxed{x^7} & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok vodorovný, směrem "**od** středu", nebo skok dolů:

- před skokem: $x^n + x^{n+1}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & \boxed{x^5} & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & \boxed{x^6} & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & \boxed{x^7} & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & \boxed{x^9} & \boxed{x^8} & \boxed{x^7} & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok vodorovný, směrem "**od** středu", nebo skok dolů:

- před skokem: $x^n + x^{n+1}$ po skoku: x^{n+2}

...	x^2	x	1	x	x^2	...
...	x^3	x^2	x	x^2	x^3	...
...	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	...
...	x^5	x^4	x^3	x^4	$\boxed{x^5}$	...
...	x^6	x^5	x^4	x^5	$\boxed{x^6}$	...
...	x^7	x^6	x^5	x^6	$\boxed{x^7}$	...
...	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	...
...	$\boxed{x^9}$	$\boxed{x^8}$	$\boxed{x^7}$	x^8	x^9	...
...	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	...

Skok vodorovný, směrem "**od** středu", nebo skok dolů:

- před skokem: $x^n + x^{n+1}$ po skoku: x^{n+2}
- změna:
  $+x^{n+2} - x^n - x^{n+1}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & \boxed{x^5} & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & \boxed{x^6} & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & \boxed{x^7} & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & \boxed{x^9} & \boxed{x^8} & \boxed{x^7} & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok vodorovný, směrem "**od** středu", nebo skok dolů:

- před skokem: $x^n + x^{n+1}$ po skoku: x^{n+2}
- změna:
  $$+x^{n+2} - x^n - x^{n+1} = x^n(\underbrace{x^2 - 1}_{=-x} - x)$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & \boxed{x^5} & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & \boxed{x^6} & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & \boxed{x^7} & \dots \\
\dots & x^8 & x^7 & x^6 & x^7 & x^8 & \dots \\
\dots & \boxed{x^9} & \boxed{x^8} & \boxed{x^7} & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok vodorovný, směrem "**od** středu", nebo skok dolů:

- před skokem: $x^n + x^{n+1}$ po skoku: x^{n+2}
- změna:
  $$+x^{n+2} - x^n - x^{n+1} = x^n(\underbrace{x^2 - 1}_{=-x} - x) = -2x^{n+1} < 0.$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & x^7 & \dots \\
\dots & x^8 & \boxed{x^7} & \boxed{x^6} & \boxed{x^7} & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok vodorovný, přes středový sloupec:

- před skokem: $x^{n+1} + x^n$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & x^7 & \dots \\
\dots & x^8 & \boxed{x^7} & \boxed{x^6} & \boxed{x^7} & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok vodorovný, přes středový sloupec:

- před skokem: $x^{n+1} + x^n$ po skoku: x^{n+1}

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots & x^2 & x & 1 & x & x^2 & \dots \\
\dots & x^3 & x^2 & x & x^2 & x^3 & \dots \\
\dots & x^4 & x^3 & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
\dots & x^5 & x^4 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\
\dots & x^6 & x^5 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\
\hline
\dots & x^7 & x^6 & x^5 & x^6 & x^7 & \dots \\
\dots & x^8 & \boxed{x^7} & \boxed{x^6} & \boxed{x^7} & x^8 & \dots \\
\dots & x^9 & x^8 & x^7 & x^8 & x^9 & \dots \\
\dots & x^{10} & x^9 & x^8 & x^9 & x^{10} & \dots
\end{array}
$$

Skok vodorovný, přes středový sloupec:

- před skokem: $x^{n+1} + x^n$ po skoku: x^{n+1}
- změna: $+x^{n+1} - x^{n+1} - x^n$

…	x^2	x	1	x	x^2	…
…	x^3	x^2	x	x^2	x^3	…
…	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	…
…	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	…
…	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	…
…	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	…
…	x^8	$\boxed{x^7}$	$\boxed{x^6}$	$\boxed{x^7}$	x^8	…
…	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	…
…	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	…

Skok vodorovný, přes středový sloupec:

- před skokem: $x^{n+1} + x^n$ po skoku: x^{n+1}
- změna: $+x^{n+1} - x^{n+1} - x^n = -x^n < 0$.

Tedy skutečně: Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**

Tedy skutečně: Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší** (přesvědčili jsme se, že buď zůstane stejná, nebo se zmenší),

Tedy skutečně: Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší** (přesvědčili jsme se, že buď zůstane stejná, nebo se zmenší), tedy **vždy je** $S < 1$.

Tedy skutečně: Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší** (přesvědčili jsme se, že buď zůstane stejná, nebo se zmenší), tedy **vždy je** $S < 1$.

Tím je důkaz toho, proč nelze doskákat do páté řady, hotov.

Tedy skutečně: Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší** (přesvědčili jsme se, že buď zůstane stejná, nebo se zmenší), tedy **vždy je** $S < 1$.

Tím je důkaz toho, proč nelze doskákat do páté řady, hotov.

K rozmyšlení: podobný důkaz nemůže projít pro první až čtvrtou řadu (neboť do nich doskákat lze). V čem a kde tento důkaz selže?

A to je vše.

Mirko Rokyta

mirko.rokyta@matfyz.cuni.cz